Eléments de réponses

Exercices sur la géométrie

Exercice 1

1. Equation de (AB) : On trouve : y = 1/3x + 2/3.
2. Coordonnées de G.

On peut utiliser plusieurs méthodes. Sachant que $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$, on peut montrer que $\vec{OG}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$. On aboutit à G (11/3 ; 13/3).

3. Equation de deux médiatrices.

La médiatrice est l'ensemble des points M du plan tels que : $\vec{C1M}.\vec{AB}=\vec{0}$ où C1 désigne le milieu de [AB].
On trouve : médiatrice de [AB] : y = -3x + 14.
médiatrice de [BC] : y = 2/3x + 8/3.
Le centre du cercle circonscrit à ABC est le point équidistant des trois sommets, il est donc situé sur les médiatrices des cotés. On recherche donc les coordonnées du point d'intersection des deux médiatrices précédentes. On trouve I (34/11 ; 52/11).

4. Hauteurs et orthocentre.

Les hauteurs sont parallèles aux médiatrices. Les équations sont donc faciles à obtenir, le coefficient directeur est connu, il suffit de rechercher l'ordonnée à l'origine des hauteurs respectives issues de C et de A.
Hauteur issue de C : y = -3x +18.
Hauteur issue de A : y = 2/3x + 1/3.
Orthocentre H (53/11 ; 39/11)

5. Points G, H et I alignés.

On peut, par exemple, calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{GH}$ et $\vec{GI}$, puis calculer le déterminant de ces vecteurs, et vérifier qu'il est bien égal à 0.

6. Cercle circonscrit Γ à ABC.

M (x ; y) est situé sur Γ si et seulement si on a : $IM^2 = IA^2$.
Γ a donc pour équation : $(x - 34/11)^2 + (y - 52/11)^2 = (34/11 - 1)^2 + (52/11 - 1)^2$
Sous forme développée : $x^2 + y^2 - 68/11x - 104/11y + 150/11 = 0$

La droite (T_A) tangente en A au cercle Γ est l'ensemble des points M du plan tels que (AM) et (AI) soient perpendiculaires.
En utilisant le produit scalaire on aboutit aux équations suivantes :
(T_A) : $23x + 41y - 64 = 0$
(T_B) : $43x - 19y - 244 = 0$
(T_C) : $- x + 47y - 420 = 0$

7. Bissectrices de A'B'C'.

La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points du plan équidistants des cotés de cet angle. Le point I est équidistant des cotés de l'angle $C'A'B'$, en effet la distance de I aux deux cotés de l'angle est égale au rayon du cercle circonscrit Γ, on a donc IA = IB = IC.
Les bissectrices se coupent donc en I qui est le centre du cercle inscrit au triangle A'B'C'.

Exercice 2

1. a) Point D.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si on a : $\vec{BA} = \vec{CD}$. On aboutit à D (2 ; 6 ; 2).

1. b) Calcul de BA et de BC.

BA = $\sqrt{4+4+1} = 3$, BC = $\sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$

L'égalité : $\vec{BC}.\vec{BA} = BC.BA.\cos\alpha$ permet de déterminer le réel $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}}$, on en tire $\alpha \approx 72{,}5°$

2. Produit vectoriel.

On trouve $\vec{N}(-5 ; -1 ; 8)$

3. Hauteur de la pyramide.

On calcule les coordonnées de $\vec{SC}$ (- 5 ; - 1 ; 8). On a donc $\vec{N} = \vec{SC}$, ce qui prouve que la droite (SC) est perpendiculaire au plan (ABC), (SC) est donc bien une hauteur de la pyramide SABCD.

4. Aire du parallélogramme.

La norme du produit vectoriel nous donne l'aire de ABCD.
On trouve : $\left\|\vec{N}\right\| = \sqrt{90}$

5. Volume de la pyramide.

$V = 1/3.\ \sqrt{90}\ .\sqrt{90} = 30\ cm^3$.

Exercice 3

1. Equation du plan (ABC)

$\vec{AB}$(-2 ; 4 ; 2) $\vec{AC}$(-6 ; 2 ; 8).

On a $\vec{AC} \neq$ k. $\vec{AB}$, les points A, B et C ne sont donc pas alignés.
On peut trouver l'équation du plan (ABC) en utilisant le produit scalaire, en effet, M est situé sur (ABC) si et seulement si $\vec{AM}$ est orthogonal à un vecteur normal du plan.
Il suffit d'utiliser l'égalité : $\vec{AM}.(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$ qui conduit à : 7x + y + 5z –30 = 0.

2. Plans P et (ABC) perpendiculaires.

On calcule le produit scalaire de deux vecteurs, l'un normal au plan (ABC), l'autre au plan P. On tire les coordonnées de ces vecteurs des équations des deux plans.
On a donc $\vec{u}$ (1 ; - 2 ; - 1) , $\vec{v}$ (7 ; 1 ; 5) et $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0$.

3. Droite D.

Un point M est situé sur D si et seulement si ses coordonnées vérifient les équations des deux plans.
On résout donc le système de deux équations à trois inconnues. Une des inconnues, z par exemple servira de paramètre. On trouve : $\begin{cases} x=-3z/5+4 \\ y=-4z/5+2 \\ z=z \end{cases}$ où z décrit l'ensemble des nombres réels.
D coupe le plan (xOy) lorsque z = 0, on en tire alors : x = 4 et y = 2. On a J (4 ; 2 ; 0).

4. Distance de E à la droite D.

On peut rechercher les coordonnées du point F de D tel que $\vec{EF}.\vec{n}=0$ où $\vec{n}$ est un vecteur directeur de D.
$\vec{n}$(-3 ; - 4 ; 5) est un vecteur directeur de D.
On aboutit à : z = 29/5 et au point F (13/25 ; -66/25 ; 29/5).
Il reste alors à calculer la distance EF = $\frac{\sqrt{2118}}{5}$.

5. On considère l'iso barycentre G du tétraèdre EABC.

G est barycentre du système {(E,1) (A,1) (B,1) (C,1)} donc du système {(H,2) (K,2)} où H et K désignent les milieux respectifs de [EA] et [BC], G est donc situé sur (HK). En procédant de même aux autres associations intéressantes des points on aboutit à la preuve demandée, G est situé sur les droites qui joignent les milieux des arêtes.

6. Coordonnées de G.

On a : $\vec{OG}=\frac{1}{4}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OE})$, on obtient alors G (3/2 ; 4 ; 11/2).
En reprenant le barycentre G de la question 5 en en associant cette fois les points A, B et C, on aboutit à G barycentre de {(E,1) (G',3)} où G' est l'iso barycentre de ABC. G est donc situé sur la droite (EG').

7. Equation de la sphère circonscrite à EABC.

Plusieurs méthodes sont possibles.
L'une d'entre elles consiste à déterminer les équations cartésiennes des plans médiateurs de [AB], [AC] et [EA], à chercher les coordonnées de leur point d'intersection I.
Il reste alors à utiliser l'égalité : $IM^2 = IA^2$ où M désigne un point de coordonnées (x ; y ; z).
Les équations des plans médiateurs de [AB], [AC] et [AE] sont respectivement les suivantes :
$-x + 2y + z - 6 = 0$, $-3x + y + 4z - 16 = 0$, $-x + y + 6z - 36 = 0$.
Le point d'intersection de ces plans est I (11/3 ; 5/3 ; 19/3)
L'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre EABC est alors :

$$(x - 11/3)^2 + (y - 5/3)^2 + (z - 19/3)^2 = 121/3$$