Eléments de réponses

Exercices sur le dénombrement et les probabilités

Exercice 1

Il y a $A_9^1 = 9$ façons de choisir le premier chiffre parmi les chiffres de 1 à 9. Une fois le premier chiffre choisi, il y a $A_9^4 = 9\times 8\times 7\times 6 = 3024$ de choisir les 4 chiffres suivants. Au total, il y a $9\times 3024 = 27216$ nombres de 5 chiffres différents ne commençant pas par un 0.

Exercice 2

a) Il y a $C_9^4 = 126$ façons de choisir 4 personnes parmi les 9, et $C_2^1 = 2$ façons de choisir le médecin qui recevra 4 personnes, soit au total $C_9^4 \times C_2^1 = 252$ façons de répartir les 9 personnes en groupes de 4 et de 5 entre les médecins.

b) Il y a $C_2^1 = 2$ façons de choisir le médecin qui recevra 4 personnes. Parmi les 4 personnes à lunettes, il y a $C_4^2 = 6$ façons d'en choisir 2 pour le médecin qui recevra 4 personnes. Parmi les 5 personnes sans lunette, il y a $C_5^2 = 10$ façons de choisir les 2 autres personnes qui seront vues par le médecin qui recevra 4 personnes. Il y a donc au total : $C_2^1 \times C_4^2 \times C_5^2 = 2\times 6\times 10 = 120$ façons dont les 2 médecins peuvent voir chacun deux personnes à lunettes

Exercice 3

a) C'est le nombre de façons de choisir 3 sujets parmi 80, sans tenir compte de l'ordre : $C_{80}^3 = 82160$.

b) Le nombre de cas possible est $C_{80}^3 = 82160$

$\mathbf{i}$ Le nombre de cas favorables est le nombre des combinaisons des 50 sujets révisés, 3 à 3 : $C_{50}^3 = 19600$. La probabilité pour que l'étudiant tombe sur 3 sujets qu'il a révisé est donc : $P(3) = \dfrac{C_{50}^3}{C_{80}^3} = \dfrac{19600}{82160} = \dfrac{245}{1027} \approx 0.24$.

$\mathbf{ii}$ Le nombre de cas favorables est : $C_{50}^2 \times C_{30}^1 = 1225\times 30 = 36750$. La probabilité pour que l'étudiant tombe sur 2 sujets qu'il a révisé est donc :

$$P(2) = \frac{C_{50}^2 \times C_{30}^1}{C_{80}^3} = \frac{36750}{82160} = \frac{3675}{8216} \approx 0.45.$$

$\mathbf{iii}$ Le nombre de cas favorables est $C_{50}^1 \times C_{30}^2 = 50\times 435 = 21750$. La probabilité pour que l'étudiant tombe sur un sujet, et un seul, qu'il a révisé, est :

$$P(1) = \frac{C_{50}^1 \times C_{30}^2}{C_{80}^3} = \frac{21750}{82160} = \frac{2175}{8216} \approx 0.26.$$

iv Le nombre de cas favorables est $C_{30}^{3} = 4060$. La probabilité pour que l'étudiant tombe sur aucun des sujets qu'il a révisé est : $P(0) = \frac{C_{30}^{3}}{C_{80}^{3}} = \frac{4060}{82160} = \frac{203}{4108} \approx 0.05$

c) Soit x le nombre de sujets à réviser ; on doit avoir :

$$P(0) = \frac{C_{80-x}^{3}}{C_{80}^{3}} \approx 0.01, \text{ donc } C_{80-x}^{3} \approx 821.60 \text{ soit } x = 62.\left(C_{18}^{3} = 816\right)$$

<u>Exercice 4</u>

Le nombre de traitements possibles est le nombre de permutations d'un ensemble à trois éléments, qui est aussi le nombre de bijections d'un ensemble à trois éléments : c'est $3!$ qui vaut 6.

Il y a donc 6 façons possibles d'organiser le traitement avec trois produits A, B, C.

<u>Exercice 5</u>

Dans ce cas, les épreuves sont indépendantes et les probabilités sont les mêmes dans les deux tirages successifs. Dans un tirage, la probabilité d'une boule blanche est égale au nombre de cas favorables (6), divisé par le nombre de cas possibles (10), c'est donc 06.

Notons B_1 l'évènement : « la boule tirée dans le premier tirage est blanc ».

Notons B_2 l'évènement : « la boule tirée dans le deuxième tirage est blanche ».

On a :

$$P(B_1) = 0.6 = P(B_2)$$
$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$$

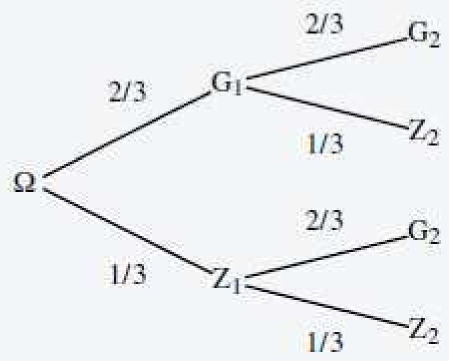
On en déduit la valeur de la probabilité de l'évènement $B_1 \cap B_2$: « la boule tirée dans le premier tirage est blanche et la boule tirée dans le deuxième tirage est blanche ».

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) = 0.6^2 = 0.36.$$

<u>Exercice 6</u>

Schématisons deux repas avec des notations

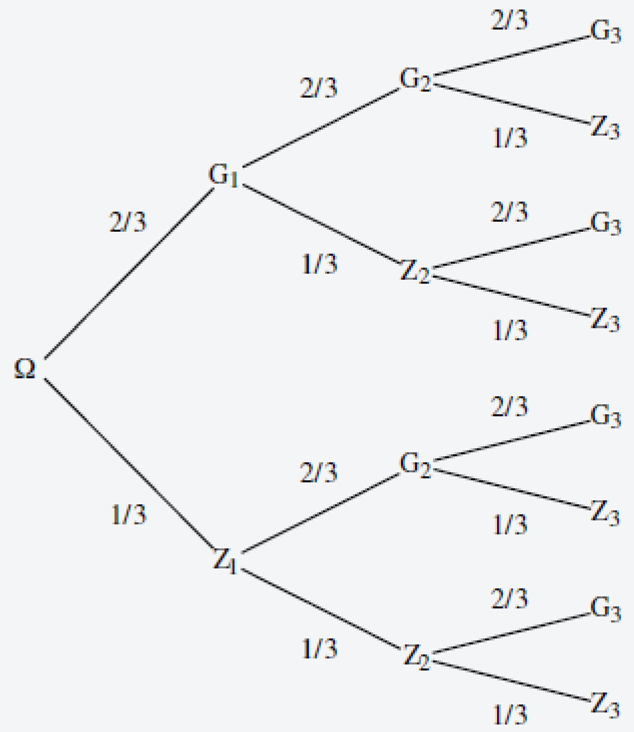
naturelles :



Alors, par indépendance de la composition des repas :

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(G_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

De même avec trois repas :



Alors, toujours grâce à l'indépendance de la composition des repas :

$$P(Z_1 \cap G_2 \cap G_3) = P(Z_1)P(G_2)P(G_3) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$$

<u>Exercice 7</u>

1) Le 1er dé a donné 5, on a donc l'évènement : $A = \{(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6)\}$. Considérons en outre l'évènement la somme supérieure ou est égale à 10 : $B = \{(5,5);(5,6)\}$. Par conséquent,

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(B)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2) Au moins l'un des dés a donné 5.

$$A = \{(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(1,5);(2,5);(3,5);(4,5);(6,5)\}$$

$$B = \{(5,5);(5,6);(6,5)\}$$

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(B)} = \frac{3}{11}.$$