Eléments de réponses

Exercices sur les équations différentielles

<u>Exercice 1</u>

a) La solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est : $y_0(x)=\lambda e^{\frac{x^2}{2}}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

Une solution particulière évidente de (E) sur $\mathbb{R}$ est : $y_p(x)=-1$.

On conclut que la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est : $y(x)=-1+\lambda e^{\frac{x^2}{2}}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

b) La solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ est : $y_0(x)=ke^{-x}, \quad k\in\mathbb{R}$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète sur $\mathbb{R}$, on va utiliser la méthode de superposition des solutions, car le second membre est la somme de trois termes de types différents.

On cherche f solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $y'+y=e^x$ sous la forme : $f(x)=k_1(x)e^{-x}$ où k_1 est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On obtient : $\forall x\in\mathbb{R},\ k_1'(x)=e^{2x}$.

On en déduit qu'une solution particulière est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}e^x$$

On cherche g solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $y'+y=x^2$ sous la forme $g(x)=k_2(x)e^{-x}$. On obtient $\forall x\in\mathbb{R},\ k_2'(x)=x^2e^x$ puis $k_2(x)=x^2e^x-2xe^x+2e^x$ grâce à deux intégrations par parties successives.

Une solution particulière de $y'+y=x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^2-2x+2$$

On cherche h solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $y'+y=-\cos x$ sous la forme : $h(x)=k_3(x)e^{-x}$. On obtient $\forall x\in\mathbb{R},\ k_3'(x)=-(\cos x)e^x$.

Donc

$$\begin{aligned}
k_3(x)&=-\int\cos(x)e^x dx=-\int\mathrm{Re}\left(e^{(1+i)x}\right)dx\\
&=-\mathrm{Re}\left(\int e^{(1+i)x}dx\right)=-\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)\\
&=-\mathrm{Re}\left((1-i)e^{ix}\frac{e^x}{2}\right)=-\frac{e^x}{2}\left(\cos(x)+\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit qu'une solution particulière de $y'+y=-\cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)$$

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ est

$$y(x) = ke^{-x} + \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{2} + x^2 - 2x + 2, \quad k \in \mathbb{R}$$

c) La solution générale de l'équation homogène $y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ est $y_0(x) = \lambda e^{-2x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$. Vu la forme du second membre, on cherche une solution particulière de (E) de la forme : $y(x) = ae^x + b\cos x + c\sin x, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a alors :
$y' + 2y = (ae^x - b\sin x + c\cos x) + 2(ae^x + b\cos x + c\sin x) = 3ae^x + (2c-b)\sin x$
$+(c+2b)\cos x$

Ainsi, y est solution de (E) si

$$3a = 4; \quad 2c - b = 1; \quad c + 2b = 1$$
$$a = \frac{4}{3}; \quad b = \frac{1}{5}; \quad c = \frac{3}{5}.$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$y = \frac{4}{3}e^x + \frac{1}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x$$

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y = \frac{4}{3}e^x + \frac{1}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x + \lambda e^{-2x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) Sur $]0;\pi[$, $\sin^3(x)$ ne s'annule pas. On a donc : $y' = \frac{2\cos x}{\sin^3(x)} y$. Or une primitive de $\frac{2\cos x}{\sin^3(x)}$ est $-\frac{1}{\sin^2 x}$ $\left(\text{on reconnaît } u' \times u^{\alpha}\right)$ avec $u = \sin x$ et $\alpha = 3$.

L'ensemble des solutions sur $]0;\pi[$ est donc : $y = ke^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

a)

Les racines du polynôme caractéristique sont 3 et $-1/2$. D'où

$y = A\,\mathrm{e}^{3x} + B\,\mathrm{e}^{-x/2}$.

b)

Les racines du polynôme caractéristique sont $5+\mathrm{j}$ et $5-\mathrm{j}$. D'où

$y = \mathrm{e}^{5x}(A\sin x + B\cos x)$.

c)

La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = A\,e^{x} + B\,e^{-x} \qquad \text{ou} \qquad y = C\,\text{sh}\,x + D\,\text{ch}\,x\,.$$

Le second membre étant une fonction polynomiale de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme. On obtient par identification

$$y = -x^{2} - 3\,.$$

d)

Le polynôme caractéristique a pour racines 1 et $-1/2$. Puisque 2j et -2j ne sont pas racines de ce polynôme, on cherchera une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y = a \sin 2x + b \cos 2x\,.$$

On obtient par identification $a = 3/85$ et $b = -29/85$. D'où la solution générale de l'équation avec second membre :

$$y = A\,e^{x} + B\,e^{-x/2} + \frac{3}{85}\sin 2x - \frac{29}{85}\cos 2x\,.$$

e)

La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = A\,e^{3x} + B\,e^{-3x} \qquad \text{ou} \qquad y = C\,\text{sh}\,3x + D\,\text{ch}\,3x\,.$$

Comme 3j et -3j ne sont pas racines du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme

$$y = a \sin 3x + b \cos 3x\,.$$

Le second membre étant pair, on prendra $a = 0$, d'où $b = -1/3$ et

$$y = A\,e^{3x} + B\,e^{-3x} - \frac{1}{3}\cos 3x\,.$$

f)

Le polynôme caractéristique admet une racine double, à savoir 2. La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = (mx+p)\,e^{2x}.$$

Puisque 2 est racine double, on cherche une solution particulière de la forme $y=(ax^2+bx+c)\,e^{2x}$. Les termes en b et c correspondant à la solution de l'équation sans second membre s'élimineront; on peut les choisir nuls.
Si $y=ax^2\,e^{2x}$, alors $y'=a(2x^2+2x)\,e^{2x}$, $y''=a(4x^2+8x+2)\,e^{2x}$. D'où $a=1$ et

$$y = \left(\frac{x^2}{2}+mx+p\right)e^{2x}.$$

g)

Sans second membre : $y=A\sin x+B\cos x$.
Avec second membre, $y=|x|+1$. Mais comme la fonction $x\mapsto|x|$ n'est pas dérivable à l'origine, les solutions ainsi obtenues ne sont valables que sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$. Cherchons les solutions valables sur $\mathbf{R}$.

Si $x>0$, $y=A\sin x+B\cos x+x+1$.
Si $x<0$, $y=A_1\sin x+B_1\cos x-x+1$.

Comme y est continue à l'origine, $B_1=B$; comme y est dérivable à l'origine, $A+1=A_1-1$, soit $A_1=A+2$. En résumé, si $x\leqslant 0$,

$$y = (A+2)\sin x+B\cos x-x+1.$$

h) L'équation caractéristique $r^2-5r+6=0$ admet deux solutions réelles distinctes $r_1=2$ et $r_2=3$. La solution générale de (E_0) est donc : $y=\lambda e^{2x}+\mu e^{3x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Puisque le second membre est de la forme e^{mx} où $m=1$, une solution particulière est de la forme $(ax^2+bx+c)e^x$. On obtient :

$$a=b=c=1$$

Ainsi, $y=(x^2+x+1)e^x$ est une solution particulière de (E). La solution générale de (E) est $y=(x^2+x+1)e^x+\lambda e^{2x}+\mu e^{3x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

i) L'équation caractéristique $r^2-3r+2=0$ admet deux solutions réelles distinctes $r_1=1$ et $r_2=2$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y=\lambda e^x+\mu e^{2x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Puisque le second membre est une somme d'exponentielle –polynômes, on cherche une solution particulière de la forme :

$$y=(ax^2+bc+c)e^x+(ux+v)e^{-2x}$$

On trouve $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-1$, $u=\dfrac{1}{12}$, $v=\dfrac{7}{144}$.

La solution générale est :

$$y(x)=\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)e^x+\left(\frac{1}{12}x+\frac{7}{144}\right)e^{-2x}+\lambda e^x+\mu e^{-2x}.$$

<u>Exercice 3</u>

1)

a)

$$h'(x)=e^{-3x}\left(f'(x)-3f(x)\right)$$

b) Comme la fonction est solution de l'équation différentielle (E), on a

$$f'(x)-3f(x)=\frac{3}{1+e^{-3x}}$$

Par conséquent,

$$h'(x)=e^{-3x}\left(f'(x)-3f(x)\right)=\frac{3e^{-3x}}{1+e^{-3x}}$$

2)

$$h'(x)=\frac{3e^{-3x}}{1+e^{-3x}}=-\frac{\left(1+e^{-3x}\right)'}{1+e^{-3x}}$$

Par conséquent,

$$h(x)=-\ln\left(1+e^{-3x}\right)+C \text{ où } C \text{ est une constante réelle}$$

3) Comme $h(x)=e^{-3x}f(x)$, on a :

$$f(x)=e^{3x}h(x)=-e^{3x}\ln\left(1+e^{-3x}\right)+Ce^{3x}$$

4) On veut $f(0)=0$

$$f(0)=-\ln(1+1)+C=0 \Leftrightarrow C=\ln(2)$$

D'où

$$f(x)=-e^{3x}\ln\left(1+e^{-3x}\right)+e^{3x}\ln(2)$$