Eléments de réponses

Exercices sur le calcul intégral et les suites

Exercice 1

1. $\displaystyle\int_2^3 (x^2+x+1)\,dx = \frac{59}{6}$ 2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \ln 2$

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{x^2}\,dx = \left[2\cdot\frac{-1}{x}\right]_1^2 = 1$ 4. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2}{t^3}\,dt = \int_1^3 2\cdot t^{-3}\,dt = \frac{8}{9}$

5. $\displaystyle\int_1^3 \frac{4}{1+x}\,dx = \left[4\cdot\ln(1+x)\right]_1^3 = 4\cdot\ln 2$

6. $\displaystyle\int_{-3}^{2} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{(x+5)^2}\right)dx = \left[\ln(x+5) + \frac{1}{x+5}\right]_{-3}^{2} = \ln\frac{7}{2} - \frac{5}{14}$

7. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \left(5+4e^{x}-e^{2x}\right)dx = \left[5x+4e^{x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 5} = 5\ln 5 + 4$

8. $\displaystyle\int_0^2 \left(2x+1+\frac{3}{2x+3}\right)dx = \left[x^2+x+\frac{3}{2}\cdot\ln(2x+3)\right]_0^2 = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{7}{3}\right)+6$

Exercice 2

1. On posé $\begin{cases} u = 2t-1 \\ v' = e^{-t} \end{cases}$ on a alors $\begin{array}{l} u' = 2 \\ v = -e^{-t} \end{array}$

$$\int_0^2 (2t-1)e^{-t}\,dt = \left[-(2t-1)e^{-t}\right]_0^2 - \int_0^2 -2e^{-t}\,dt = 1-5e^{-2}$$

2. On pose $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = x^2 \end{cases}$ d'où $\begin{array}{l} u' = \dfrac{1}{x} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array}$

$$\int_1^e x^2\cdot\ln x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\cdot\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{2e^3+1}{9}$$

3. $\int^{\pi} (x-1)\sin x \,.\, dx = \left[-(x-1).\cos x\right]^{\pi} - \int^{\pi} -\cos$ [illegible]

[illegible]

Exercice 3

1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2.\cos(3t)\,dt = \left[\frac{2}{3}\sin(3t)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3}$

2. On doit linéariser l'expression $\sin x.\cos 2x$ en utilisant une formule de trigonométrie :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\sin x.\cos 2x = \frac{1}{2}\left(\sin 3x + \sin(-x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 3x - \sin x\right)$$

$$\int_0^{\pi/3} \sin x.\cos 2x.\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x - \sin x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{12}$$

3. [illegible]

Exercice 4

Rappel : si $t = f(x)$ $\quad dt = f'(x).dx$

1. $t = \sin x \qquad dt = \cos x \, . \, dx$

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$$

$t = 0 \quad x = 0$

$t = \frac{1}{2} \quad x = \frac{\pi}{6}$

sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ on a $\cos x > 0$ donc $|\cos x| = \cos x$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x \, . \, dx}{\cos x} = [x]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

2. $z^2 = 1 + t \qquad 2z \, . \, dz = dt \qquad t = 0$ conduit à $z^2 = 1$ on choisit $z = 1$

$t = 3$ conduit à $z^2 = 4$ on choisit $z = 2$

$$1 + \sqrt{1+t} = 1 + \sqrt{z^2} = 1 + |z|$$

$z \in [1;2]$ donc $|z| = z$

[illegible]

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{-x}} . dx \qquad t = e^x \qquad dt = e^x . dx$

$x = 0 \quad t = 1$

$x = 1 \quad t = e$

$$\int_0^1 \frac{e^x \, dx}{1+e^{-x}} = \int_1^e \frac{dt}{1+\frac{1}{t}} = \int_1^e \frac{t}{1+t} . dt = \int_1^e \frac{1+t-1}{1+t} . dt$$

$$= \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dx = \left[t - \ln(1+t)\right]_1^e$$

$$= e - \ln(1+e) - 1 + \ln(2)$$

$$= e - 1 + \ln \frac{2}{1+e}$$

Exercice 5

a) On obtient

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|dx$$

Mais, si $x \in [0;\pi]$, on a $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$, donc

$$I_1 = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \sqrt{2}\left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 2\sqrt{2}$$

b) Effectuons une intégration par parties

$$u = x^2 + x + 1 \qquad v' = e^x$$

$$u' = 2x + 1 \qquad v = e^x$$

Les fonctions u et v étant dérivables et à dérivées continues sur $[0;1]$

$$I_2 = \left[\left(x^2+x+1\right)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (2x+1)e^x dx = 3e - 1 - \int_0^1 (2x+1)e^x dx$$

Effectuons une nouvelle IPP du second terme

$$u = 2x + 1 \qquad v' = e^x$$

$$u' = 2 \qquad v = e^x$$

$$I_2 = 3e - 1 - \left[(2x+1)e^x\right]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx$$

$$= 2(e-1)$$

c)

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

La décomposition en élément simple est de la forme :

$$\frac{x-1}{x^2-x-2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$$

On en déduit par identification que : $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$. Par conséquent

$$I_3 = \frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[2\ln(|x+1|) + \ln(|x-2|)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln(2)$$

d)

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

$$\frac{x+1}{x^2+4x+4} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$$

Avec $a = 1$ et $b = -1$.

$$I_4 = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right) dx = \left[\ln(|x+2|) + \frac{1}{x+2} \right]_0^1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{6}.$$

Exercice 6

1. Calcul de a, b, c

$$F'(x) = (2ax+b)e^{2x} + 2(ax^2+bx+c).e^{2x}$$

$$F'(x) = \left(2a.x^2 + (2a+2b)x + (b+2c)\right).e^{2x}$$

$F'(x) = f(x)$ conduit par identification des coefficients à :

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ 2a+2b = -2 \\ b+2c = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } a=2,\ b=-3,\ c=2$$

3. Calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 (4x^2-2x+1).e^{2x}.dx$

$$I = \left[F(x)\right]_0^1 = F(1) - F(0) = e^2 - 2$$

Exercice 7

a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \sin x)$, d'où $\sqrt{2}\,\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x} = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x} = 1 + \tan x$.

b) Par le changement de variable : $u = \frac{\pi}{4} - x$, il vient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)(du)$$

c) D'après a), on a $\ln(1+\tan x) = \ln\sqrt{2} + \ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \ln\cos x$, d'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}dx = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} = \frac{\pi\ln 2}{8}$$

Exercice 8

…/5

1. Inéquation $f(x) \geqslant 0$

f est défini sur $]-2;2[$

on a : $2-x > 0$ sur $]-2;2[$

l'inéquation $\ln \frac{2+x}{2-x} \geqslant 0$ conduit à $\frac{2+x}{2-x} \geqslant 1$

en multipliant les deux membres par $2-x$ (positif sur $]-2;2[$)

on aboutit à : $x \geqslant 0$

$f(x) \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions $S = [0;2[$

Signe de $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

Sur $[0;1]$ on a donc $f(x) \geqslant 0$ donc I est positif.

2. $f'(x) = \frac{+4}{(2-x)^2} \times \frac{2-x}{2+x} = \frac{4}{4-x^2}$

Intégration par parties : on pose $\begin{cases} u = \ln \frac{2+x}{2-x} & u' = \frac{4}{4-x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{cases}$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[x \ln \frac{2+x}{2-x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4x}{4-x^2}\,dx$$

En écrivant $\frac{4x}{4-x^2} = -2 \cdot \frac{-2x}{4-x^2}$ on retrouve une forme connue : $\frac{u'}{u}$

$$I = \ln 3 + 2\left[\ln(4-x^2) \right]_0^1 = \ln 3 + 2 \ln \frac{3}{4} = \ln \frac{27}{16}$$

Exercice 9

$$f(x) = \frac{x^2+2x+4}{x+1} = \frac{x^2+2x+1+3}{x+1} = \frac{x^2+2x+1}{x+1} + \frac{3}{x+1}$$
$$= \frac{(x+1)^2}{x+1} + \frac{3}{x+1} = x+1+\frac{3}{x+1}$$

Une primitive de la fonction f est donc : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 3\ln|x+1|$.

Exercice 10

1)

$$f(x) = e^{-x}\sin(x),$$
$$f^{'}(x) = -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$
$$f^{"}(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x}\cos x$$
$$f^{(3)}(x) = -2\left(-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x\right) = 2e^{-x}(\cos x + \sin x)$$
$$f^{(4)}(x) = 2\left(-e^{-x}(\cos x + \sin x) + e^{-x}(-\sin x + \cos x)\right) = -4e^{-x}\sin(x)$$

Par conséquent,

$$f(x) = -\frac{1}{4}f^{(4)}(x)$$

2) On en déduit qu'une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est :

$$F(x) = -\frac{1}{4}f^{(3)}(x)$$

En effet,

$$F^{'}(x) = -\frac{1}{4}f^{(4)}(x) = f(x).$$

3)

$$J = \int_0^{\pi} f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\left[f^{(3)}(x)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{4}\left(f^{(3)}(\pi) - f^{(3)}(0)\right)$$
$$= \frac{1}{4}f^{(3)}(0) - \frac{1}{4}f^{(3)}(\pi)$$
$$= \frac{1}{4}\left(2e^{0}(\cos 0 + \sin 0)\right) - \frac{1}{4}\left(2e^{-\pi}(\cos\pi + \sin\pi)\right)$$
$$= \frac{2}{4} + \frac{2e^{-\pi}}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\pi}\right)$$

Exercice 11

1) $I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_{-2}^{0} = -\left(1 - e^{2}\right) = e^{2} - 1$

2)

$$I_{n+1} = \int_{-2}^{0} x^{n+1}e^{-x}dx = -\left[x^{n+1}e^{-x}\right]_{-2}^{0} + (n+1)\int_{-2}^{0} x^{n}e^{-x}dx$$
$$= -\left(0 - e^{2}(-2)^{n+1}\right) + (n+1)\int_{-2}^{0} x^{n}e^{-x}dx$$
$$= e^{2}(-2)^{n+1} + (n+1)I_n$$

3) Par conséquent,

$$I_1 = e^{2}(-2)^{1} + I_0 = -e^{2} + e^{2} - 1 = -1$$

$$I_2 = e^2 (-2)^2 + 2I_1 = 4e^2 - 2$$

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$V_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \frac{u_n-1}{5u_n+15} = \frac{1}{5}\frac{u_n-1}{u_n+3} = \frac{1}{5}V_n .$$

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$.

Exercice 13

1. Calcul de I_0 et J_0

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

2. Intégration par parties

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cdot \sin x \, dx$ on pose $\begin{cases} u = e^{-nx} & u' = -n e^{-nx} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{cases}$

5/5

$$I_n = \left[-\cos x \, e^{-nx}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cdot \cos x \, dx}_{J_n}$$

d'où $I_n = 1 - n J_n$ ou encore : $\boxed{I_n + n J_n = 1}$

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cdot \cos x \, dx$: On pose $u = e^{-nx}$ $\quad u' = -n \cdot e^{-nx}$

$v' = \cos x \quad v = \sin x$

$$J_n = \left[\sin x \cdot e^{-nx}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{-nx} \, dx}$$

I_n

d'où $J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} + n\, I_n$ ou encore : $\underline{\underline{-n I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}}}$

3. Calcul de I_n et J_n

$$\begin{cases} I_n + n\, J_n = 1 \\ -n\, I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

on aboutit à : $I_n = \dfrac{1 - n e^{-\frac{n\pi}{2}}}{1+n^2}$ et $J_n = \dfrac{n + e^{-\frac{n\pi}{2}}}{1+n^2}$

Calcul des limites.

$$I_n = \frac{1}{1+n^2} - \frac{n}{(1+n^2)\cdot e^{\frac{n\pi}{2}}} = \frac{1}{1+n^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+n\right)} \times \frac{1}{e^{n\frac{\pi}{2}}}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n\frac{\pi}{2}} = +\infty$.

$$J_n = \frac{n}{1+n^2} + \frac{1}{(1+n^2)\cdot e^{n\frac{\pi}{2}}}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$