Eléments de réponses

Exercices sur les nombres complexes

Exercice 1

1/

$$z=\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}=\frac{(1+i)^2(1+i)^3}{(1-i)^3(1+i)^3}=\frac{(1+i)^5}{\left(|1-i|^2\right)^3}$$

Or , $|1-i|^2=2$ et d'après la formule du binôme :

$$(1+i)^5=\sum_{k=0}^{5}C_5^k i^k$$

Pour déterminer C_5^k, on utilise le triangle de Pascal : $(1+i)^5=-4(1+i)$

D'où :

$$z=\frac{-4(1+i)}{2^3}=-\frac{1}{2}(1+i)$$

$$\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2}$$

D'autre part,

$$|z|=\frac{1}{2}|1+i|=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} z&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

D'où $A\mathrm{rg}(z)=\frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

2/

$$\begin{aligned} z^2&=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2+i^2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2-2i\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\\ &=\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(2+\sqrt{3}\right)-2i\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}\\ &=-2\sqrt{3}-2i\sqrt{4-3}\\ &=-2\left(\sqrt{3}+i\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $\left|z^2\right|=2\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2\sqrt{4}=4$ et alors :

$$z^2 = 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + -\frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

On a donc $|z| = \sqrt{|z^2|} = 2$ et $Arg\left(z^2\right) = 2Arg(z)[2\pi]$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} Arg(z) &= \frac{1}{2}Arg\left(z^2\right)[\pi] \\ &= \frac{7\pi}{12}[\pi] \\ &= \frac{7\pi}{12}[2\pi] \text{ ou } \frac{19\pi}{12}[2\pi] \end{aligned}$$

Mais $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $\mathrm{Im}(z) < 0$, donc : $Arg(z) = \frac{19\pi}{12}[2\pi]$.

3/

$$e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\left|e^{i\theta} + 1\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \begin{cases} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), & \theta \in [0;\pi[\\ 0, & \theta = \pi \\ -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), &]\pi;2\pi] \end{cases}$$

Donc, pour $\theta \neq \pi$:

$$Arg\left(e^{i\theta} + 1\right) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} \ [2\pi], & \theta \in [0;\pi[\\ \frac{\theta}{2} + \pi \ [2\pi], &]\pi;2\pi] \end{cases}$$

Car : $Arg(-z) = Arg(z) + \pi[2\pi]$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

De même : $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$, car $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left|e^{i\theta} - 1\right| &= 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \\ &= \begin{cases} 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), & \theta \in]0;2\pi[\\ 0, & \theta = 0 \text{ ou } \theta = 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Donc pour $\theta \notin [0;2\pi]$,

$$Arg(e^{i\theta} - 1) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

Exercice 2

a) $\cos(2x)\sin^3(x)$

$$\begin{aligned}\cos(2x)\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{i}{2^4}\left(e^{5ix}-3e^{3ix}+4e^{ix}-4e^{-ix}+3e^{-3ix}-e^{-5ix}\right) \\ &= -\frac{1}{8}\left(\sin(5x)-3\sin(3x)+4\sin(x)\right)\end{aligned}$$

b) De la même manière :

$$\begin{aligned}\cos^2(x)\sin(2x)\cos(3x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^4 i}\left(e^{7ix}+2e^{5ix}-e^{ix}+e^{ix}-2e^{-5ix}-e^{-7ix}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\sin(7x)+2\sin(5x)-\sin(x)\right)\end{aligned}$$

Exercice 3

$$\begin{aligned}S &= \mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi}{11}i}\right)+\mathrm{Re}\left(e^{\frac{3\pi}{11}i}\right)+\mathrm{Re}\left(e^{\frac{5\pi}{11}i}\right)+\mathrm{Re}\left(e^{\frac{7\pi}{11}i}\right)+\mathrm{Re}\left(e^{\frac{9\pi}{11}i}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi}{11}i}+e^{\frac{3\pi}{11}i}+e^{\frac{5\pi}{11}i}+e^{\frac{7\pi}{11}i}+e^{\frac{9\pi}{11}i}\right)\end{aligned}$$

On reconnaît une somme géométrique de 5 termes, de raison $e^{\frac{2\pi}{11}i}\neq 1$, de premier terme $e^{\frac{\pi}{11}i}$, on a donc :

$$\begin{aligned}e^{\frac{\pi}{11}i}+e^{\frac{3\pi}{11}i}+e^{\frac{5\pi}{11}i}+e^{\frac{7\pi}{11}i}+e^{\frac{9\pi}{11}i} &= \frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{11}i}\right)^5}{1-e^{\frac{2\pi}{11}i}}\times e^{\frac{\pi}{11}i} \\ &= e^{\frac{\pi}{11}i}\times\frac{1-e^{\frac{10\pi}{11}i}}{1-e^{\frac{2\pi}{11}i}}\end{aligned}$$

Or

$$e^{\frac{\pi}{11}i}\times\frac{1-e^{\frac{10\pi}{11}i}}{1-e^{\frac{2\pi}{11}i}} = \frac{e^{\frac{\pi}{11}i}\times e^{\frac{5\pi}{11}i}}{e^{\frac{\pi}{11}i}}\times\frac{e^{\frac{-5\pi}{11}i}-e^{\frac{5\pi}{11}i}}{e^{\frac{-\pi}{11}i}-e^{\frac{\pi}{11}i}} = e^{\frac{5\pi}{11}i}\,\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}$$

Donc,

$$S=\mathrm{Re}\left(e^{\frac{5\pi}{11}i}\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}\mathrm{Re}\left(e^{\frac{5\pi}{11}i}\right)=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{11}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}=\frac{1}{2}$$

<u>Exercice 4</u>

a)

$$\Delta=-3<0$$

Donc,

$$z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=j \quad \text{ou} \quad \bar{j}$$

b) On résout $z^4=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ étant une solution évidente}$$

On a

$$z^4=i \Leftrightarrow z^4=z_0^4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^4=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \text{ est une racine quatrième de l'unité}$$

Il existe donc $k\in[\![0;3]\!]$/ $\quad \frac{z}{z_0}=e^{\frac{2ik\pi}{4}}=e^{\frac{ik\pi}{2}}$

Autrement dit : $z=z_0e^{i\frac{k\pi}{2}}=e^{i\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}$

L'ensemble solution de $z^4=i$ est donc $\left\{e^{\frac{i\pi}{8}},e^{\frac{i5\pi}{8}},e^{\frac{i9\pi}{8}},e^{\frac{i13\pi}{8}}\right\}$

c) Ici, $z_0 = -(2+i)$ est solution évidente, puis on en déduit que $\frac{z}{z_0}$ est une racine 3ème de l'unité :

$$\frac{z}{z_0} \in \{1, j, \overline{j}\}, \text{ d'où } \quad z \in \{z_0, jz_0, \overline{j}z_0\}.$$

L'ensemble solution est donc $\{-(2+i); -(2+i)j; -(2+i)\overline{j}\}$.

Exercice 5

a) Il s'agit de résoudre

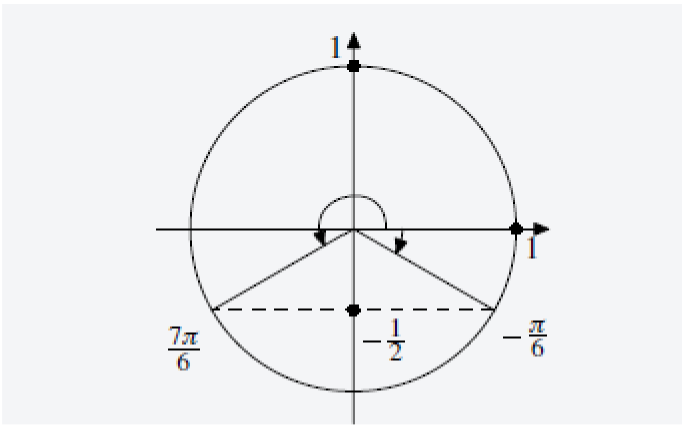
$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } 2x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12}[\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4}[\pi]$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = -\frac{\pi}{12}[\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4}[\pi]\right\}$.

b)



Dans l'intervalle $[0; 2\pi]$, les x solutions sont entre $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ et $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Dans $\mathbb{R}$:

$$\sin(x) \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

L'ensemble solution est : $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right]$.

Exercice 6

a)

$$|z|=|z-6+5i| \Leftrightarrow |z|^2=|z-6+5i|^2\,; \quad z=x+iy$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2=(x-6)^2+(y+5)^2$$
$$\Leftrightarrow 12x-10y-61=0$$

D’où l’ensemble cherché est la droite d’équation : $12x-10y-61=0$.

b)

$$z\left(2\bar{z}+1\right)=1 \Leftrightarrow (x+iy)\left(2(x-iy)+1\right)=1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+x+2y^2+iy=1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x+2y^2=1 \\ y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ ou } \dfrac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z=-1 \quad \text{ou} \quad z=\frac{1}{2}$$

L’ensemble solution est $\left\{-1;\dfrac{1}{2}\right\}$.

c) La condition est définie par $z\neq\dfrac{3}{5}$. Pour cette valeur de z, ona :

$$\frac{z+4i}{5z-3}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z+4i}{5z-3}=\overline{\left(\frac{z+4i}{5z-3}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{z+4i}{5z-3}=\frac{\bar{z}-4i}{5\bar{z}-3}$$
$$\Leftrightarrow (z+4i)\left(5\bar{z}-3\right)=\left(\bar{z}-4i\right)(5z-3)$$
$$\Leftrightarrow -6iy+40ix=24i$$
$$\Leftrightarrow 20x-3y-12=0$$

D’où l’ensemble cherché est la droite d’équation : $20x-3y-12=0$.

d) La condition est définie pour $z\neq-1$. Pour ces valeurs de z

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1}\in i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1}=-\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1}=\frac{1-\bar{z}}{\bar{z}+1}$$
$$\Leftrightarrow 2z\bar{z}=2$$
$$\Leftrightarrow |z|=1$$

L’ensemble cherché est donc le cercle de centre O de rayon 1, privé de $z=1$.