Exercices sur la géométrie

Exercice 1

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points A, B et C de coordonnées respectives (1 ; 1), (7 ; 3) et (3 ; 9).

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
2. On appelle G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer les coordonnées de G.
3. Déterminer une équation des médiatrices des cotés [AB] et [BC]. Calculer les coordonnées du centre I du cercle circonscrit Γ au triangle ABC.
4. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC (l'orthocentre est le point d'intersection des hauteurs)
5. Démontrer que les points G, I et H sont alignés. (la droite (GH) s'appelle la droite d'Euler du triangle).
6. Donner une équation cartésienne des tangentes en A, B et C au cercle Γ.
7. Les trois tangentes précédentes définissent un triangle A'B'C'. Démontrer que les bissectrices intérieures des angles du triangle A'B'C' se coupent en I.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A (1 ; 3 ; 1) B (3 ; 1 ; 2) C (4 ; 4 ; 3) et S (9 ; 5 ; - 5)

1. a) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
   b) Déterminer les longueurs BA et BC ainsi qu'une mesure de l'angle géométrique ABC à un 0,1 degré près.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{N} = \vec{BC} \wedge \vec{BA}$.
3. Démontrer que la droite (SC) est une hauteur de la pyramide SABCD.
4. Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.
5. Déduire de ce qui précède le volume de la pyramide SABCD.

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A (4 ; 2 ; 0) B (2 ; 6 ; 2) C (-2 ; 4 ; 8).

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Déterminer une équation du plan (ABC).
2. On appelle P le plan d'équation : $x - 2y - z = 0$. Démontrer que les plans (ABC) et P sont perpendiculaires.
3. Donner un système d'équations paramétriques de la droite D commune aux plans P et (ABC). Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de D et du plan (xOy).
4. On considère le point E (2 ; 4 ; 12). Calculer la distance exacte du point E à la droite D.
5. On considère le tétraèdre EABC. Démontrer que les droites joignant les milieux de deux cotés opposés sont concourantes en un point G.
6. Déterminer les coordonnées de G. Démonter que la droite (EG) coupe le plan (ABC) en un point K, centre de gravité du triangle ABC.