Exercices sur les équations différentielles

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle donné

a) $y' - xy = x$, $I = \mathbb{R}$

b) $y' + y = e^x + x^2 - \cos x$, $I = \mathbb{R}$

c) $y' + 2y = 4e^x + \sin x + \cos x$, $I = \mathbb{R}$

d) $\sin^3(x)\, y' = 2(\cos x)\, y$, $I =]0;\pi[$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$

b) $y'' - 10y' + 26y = 0$

c) $y'' - y = 1 + x^2$

d) $2y'' - y' - y = 3\cos(2x) - \sin(2x)$

e) $y'' - 9y = 6\cos(3x)$

f) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

g) $y'' + y = |x| + 1$

h) $y'' - 5y' + 6y = (2x^2 - 4x + 1)e^x$

i) $y'' - 3y' + 2y = x(e^x + e^{-2x})$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle : $(E)\quad y'(x) - 3y(x) = \dfrac{3}{1+e^{-3x}}$.

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle (E).

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-3x} f(x)$.

1)

   a) Exprimer $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$, pour tout x réel.

   b) Montrer que, pour tout x réel, $h'(x) = \dfrac{3e^{-3x}}{1+e^{-3x}}$.

2) Déterminer alors toutes les fonctions h possibles. (On justifiera la réponse.)

3) En déduire toutes les fonctions f solutions de (E).

4) Déterminer la solution de (E), qui s'annule en 0.