Exercices sur le calcul intégral et les suites

Exercice 1

Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

1/ $\int_{2}^{3}\left(x^2+x+1\right)dx$

2/ $\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx$

3/ $\int_{1}^{2}\frac{2}{x^2dx}$

4/ $\int_{1}^{3}\frac{2}{x^3}dx$

5/ $\int_{1}^{3}\frac{4}{1+x}dx$

6/ $\int_{-3}^{2}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{(x+5)^2}\right)dx$

7/ $\int_{0}^{\ln 5}\left(5+4e^x-e^{2x}\right)dx$

8/ $\int_{0}^{2}\left(2x+1+\frac{3}{2x+3}\right)dx$

Exercice 2

Calcul d'intégrales à l'aide d'intégration par parties

1/ $\int_{0}^{2}(2x-1)e^{-x}dx$

2/ $\int_{1}^{e}x^2.\ln(x)\,dx$

3/ $\int_{0}^{\pi}(x-1)\sin(x)\,dx$

4/ $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}.\ln(x)\,dx$

Exercice 3

Calcul d'intégrales de fonctions trigonométriques

1/ $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}2.\cos(3x)\,dx$

2/ $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin(x).\cos(2x)\,dx$

3/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$

Exercice 4

Calcul d'intégrales par changement de variable

1/ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ en posant $t=\sin(x)$

2/ $\int_0^{3} \frac{dt}{1+\sqrt{1+t}}$ en posant $z^2=1+t$.

3/ $\int_0^{1} \frac{e^x}{1+e^{-x}}.dx$ en posant $t=e^x$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

a) $I_1=\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos x}dx$

b) $I_2=\int_0^{1} \left(x^2+x+1\right)e^x dx$

c) $I_3=\int_0^{1} \frac{x-1}{x^2-x-2}dx$

d) $I_4=\int_0^{1} \frac{x+1}{x^2+4x+4}dx$

Exercice 6

On considère la fonction $f(x)=\left(4x^2-2x+1\right)e^{2x}$.

1/ Déterminer une primitive F de f sous la forme : $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{2x}$. Où a,b,c sont des constantes réelles à déterminer.

2/ Calculer l'intégrale $I=\int_0^{1} \left(4x^2-2x+1\right).e^{2x}.dx$

Exercice 7

a) Montrer que pour tout $t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on a :

$$1+\tan(x)=\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos(x)}, \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0 \text{ et } \cos(x)>0$$

b) En utilisant la changement de variable $x = \frac{\pi}{4} - u$, montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\, dx$$

c) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\, dx$

Exercice 8

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) dx$.

1/ Sans calculer I, montrer que : $I \geq 0$.

2/ En faisant une intégration par parties, calculer I.

Exercice 9

Déterminer une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle $]-1;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x+1}.$$

Exercice 10

On considère la fonction numérique f, de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} \sin(x)$$

1) En calculant les dérivées successives de la fonction f jusqu'à l'ordre 4, trouver une relation entre la fonction f et sa dérivée d'ordre 4 notée $f^{(4)}$.
2) En déduire qu'on peut choisir comme primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$:
$F(x) = -\frac{1}{4} f^{(3)}(x)$, où $f^{(3)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre 3 de f.
3) On pose $J = \int_0^{\pi} f(x)\, dx$. Montrer que : $J = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$.

Exercice 11

On considère : $I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x} dx$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_n = \int_{-2}^{0} x^n e^{-x} dx$.

1) Calculer l'intégrale I_0.
2) En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité : $I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n$.
3) En déduire les valeurs des intégrales : I_1 et I_2

Exercice 12

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $V_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison q.

Exercice 13

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\sin(x)\,dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\cos(x)\,dx$.

1/ Calculer : I_0 et J_0.

2/ Par une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = 1 - nJ_n$$

$$J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} + nI_n$$

3/ Exprimer les intégrales I_n puis J_n en fonction de n. Puis en déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} J_n$$