## Exercices sur les fonctions, développements limités

Exercice 1

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$.

a) Etudier les branches infinies de $f$.
b) Faire une étude des variations de $f$ et donner l'allure de la représentation graphique de $f$.
c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2

En utilisant des développements limités déterminer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x}$

Exercice 3

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de $f$ et ses éventuelles limites aux bornes de cet ensemble.
b) Etudier les branches infinies de $f$, et préciser la position locale de la courbe par rapport à ses éventuelles asymptotes.

Exercice 4

Etudier les variations, puis construire la courbe de la fonction $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1}$.

Exercice 5

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.

1) Montrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.
2) Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
3) Etudier les variations de la fonction $f$.

Exercice 6

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)e^x$

On note $C_f$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

***PARTIE A***

1)
   a) Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$.
   b) Donner les limites de $f$ aux bornes de $D_f$.
   c) En déduire que $C_f$ admet une asymptote $\Delta$ en $-\infty$ dont on donnera une équation.
2) Déterminer $f'(x)$
   a) Justifier que $f$ est dérivable sur $D_f$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
   b) Dresser le tableau de variation de $f$.
3) Déterminer une équation de la tangente $T_1$ au point $\mathrm{A}$ d'abscisse $1$ de la courbe $C_f$ et une équation de la tangente $T_{-1}$ au point $B$ d'abscisse -1.

***PARTIE B***

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1-x)e^x - \frac{x+3}{e}$$

4) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ où $g'$ et $g''$ sont les dérivées premières et seconde de $g$.
5) Etudier le signe de $g''$ et le sens de variation de $g'$.
6) En déduire la position de la courbe $C_f$ par rapport à la tangente $T_{-1}$.
7) Tracer : l'asymptote $\Delta$, les tangentes $T_1$ et $T_{-1}$ et la courbe $C_f$.

***Remarque*** : *pour tracer ces courbes, on considérera les valeurs approchées suivantes :*

$$e \approx 2.7 \quad \text{et} \quad \frac{1}{e} \approx 0.4 .$$