LES SUITES.

1 Suites.

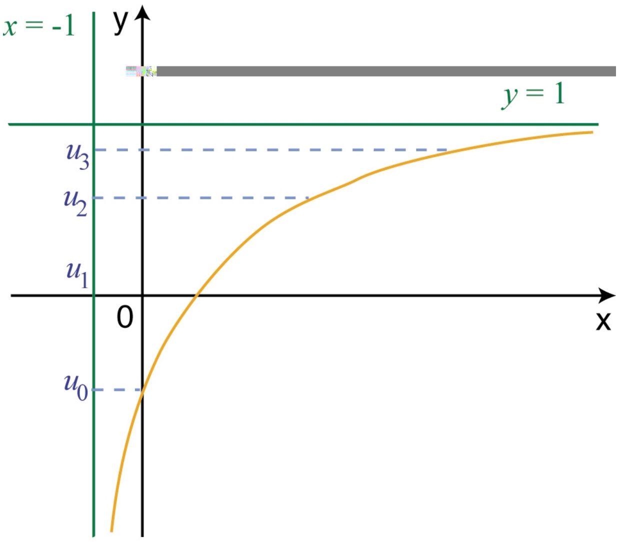
1.1 Suites numériques.

1.1.1 Approche.

On observe dans une entreprise, que les bénéfices en millions de francs réalisés au bout de x années de fonctionnement peuvent être modéliser par la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Pour obtenir les bénéfices réalisés au 1[ier] janvier de chaque année, nous pouvons considérer les images par cette fonction de tous les entiers naturels. Le premier réel n'a pas de sens au niveau de l'interprétation en terme de bénéfice.

$$f(0)=-1\ ,\ f(1)=0\ ,\ f(2)=\frac{1}{3}\ ,\ f(3)=\frac{1}{2},\ f(4)=\frac{3}{5}\ ,\cdots,\ f(n)=\frac{n-1}{n+1},\cdots$$



On note cette « suite de réels » de la façon suivante :

$$u_0=-1\ ,\ u_1=0\ ,\ u_2=\frac{1}{3}\ ,\ u_3=\frac{1}{2},\ u_4=\frac{3}{5}\ ,\cdots,\ u_n=f(n)=\frac{n-1}{n+1},\cdots$$

On peut commencer la suite à partir de l'entier 0 ou de l'entier 1. Le premier élément est alors : u_0 *ou* u_1

1.1.2 Définitions

Définition

Une suite est un ensemble d'éléments numérotés par des indices entiers. Elle peut être finie ou infinie selon le nombre d'éléments qu'elle contient. Dans ce qui suit, nous ne considérerons que des suites infinies.

Une suite numérique, est un ensemble de nombres réels noté $(u_n)_{n\in N}$ ou encore $(u_n)_n$, ou plus simplement (u_n).

On dit qu'une suite (u_n) est définie sur une partie A de N si et seulement si u_n existe pour tout élément n de A.

Exemple

La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ est définie sur N^*.

u_n est appelé le $n^{ième}$ terme de la suite, ou encore terme général de la suite.
On distinguera la suite (u_n) avec des parenthèses et son terme général u_n.

1.1.3 Forme explicite

Une suite numérique peut être donnée sous forme explicite. Dans ce cas, le terme général de la suite est exprimé explicitement en fonction de l'entier naturel n.

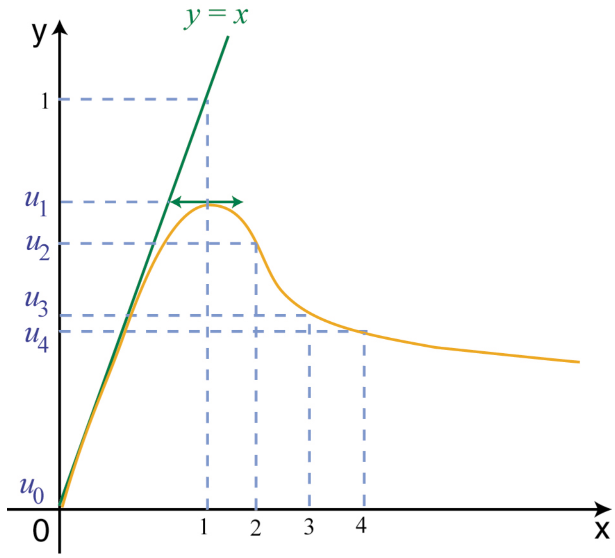
Ainsi, la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+3}$, la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2\sqrt{n+1}$ et de façon générale toute suite dont le terme général peut s'écrire $u_n = f(n)$, sont des suites données sous forme explicite.

Remarque

Lorsque le terme général d'une suite (u_n) peut s'écrire $u_n = f(n)$, il suffit d'étudier f pour connaître la suite (u_n).

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur N dont le terme général est $\forall n \in N \ , \ u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$. On étudie la fonction f définie sur R par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Les termes de la suite sont les images par f des entiers naturels.



1.1.4 Forme récurrente

Une suite numérique peut être donnée sous forme récurrente. Dans ce cas, la valeur d'un (ou de plusieurs) terme de la suite, en général le premier, est donnée explicitement alors que le $n^{ième}$ terme de la suite est exprimé en fonction d'un (ou de plusieurs) termes précédents. Les termes de la suite se calculent alors de proche en proche en partant de la valeur explicite du ou des premiers termes de la suite et en utilisant la formule de récurrence.

Exemple

- La suite (u_n) définie sur N^* donnée par $u_1 = 1 \ et \ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

  On a alors : $u_2 = \sqrt{u_1 + 2} = \sqrt{3},\ u_3 = \sqrt{u_2 + 2} = \sqrt{\sqrt{3} + 2}, etc\ldots$

- La suite (u_n) définie sur N^* donnée par $u_1 = 1, u_2 = 2 \ et \ u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1}} + u_n$.

  On a alors : $u_3 = \sqrt{2u_2} + u_1 = 3,\ u_4 = \sqrt{2u_3} + u_2 = \sqrt{6} + 2, etc\ldots$

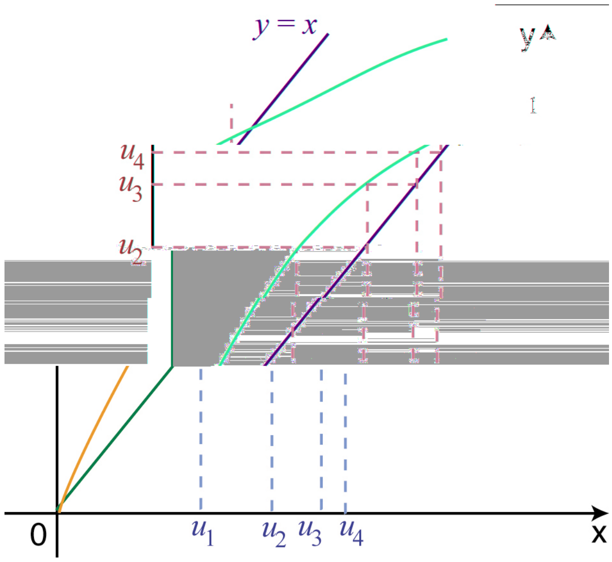
Vous pourrez programmer votre calculette afin de lui faire calculer le $n^{ième}$ terme d'une suite définie par récurrence.

Exemple

Lorsque la suite (u_n) est donnée de façon récurrente par son premier terme et une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Le tracé de la courbe représentative de f permet de **conjecturer** les propriétés de la suite.

Prenons l'exemple : $u_1 = \frac{1}{2}$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

On trace la courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal. On trace également la droite d'équation réduite : $y = x$.



On construit la suite en se servant de la première bissectrice. Les termes de la suite semblent s'accumuler en croissant vers le réel 1.

Faites le dessin en prenant comme terme de départ $u_1 = \frac{3}{2}$, vous constaterez que cette fois-ci la suite semblent s'éloigner indéfiniment, « tendre vers l'infini ».

Définition

On peut également définir des suites par la donnée de leurs deux premiers termes u_0 *et* u_1 et d'une relation de récurrence d'ordre deux :

$u_{n+2} = \varphi(u_{n+1}, u_n)$ *pour* $n \geq 0$

Exemple

Les nombres de Fibonacci (1175-1240, Pise, ce mathématicien répand les méthodes arabes de calcul en occident).

Chaque nombre est la somme des deux précédents.

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *et* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *pour* $n \geq 0$

Vous pourrez vous amuser à donner les 30 premiers nombres de Fibonacci, la donnée du dernier terme demandé vous permettra de tester votre programme.

($u_{30} = 832\ 040$).

1.1.5 Suites bornées, monotones

Définition

- Une suite (u_n) est dite **majorée** si et seulement s'il existe un réel constant *M* tel que, pour tout entier naturel *n* on ait $u_n \leq M$.
- Une suite (u_n) est dite **minorée** si et seulement s'il existe un réel constant *m* tel que, pour tout entier naturel *n* on ait $u_n \geq m$.
- Une suite (u_n) est dite **bornée** si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

Autrement dit, une suite est bornée si et seulement s'il existe un réel constant *M* et un réel constant *m* tels que, pour tout entier naturel *n* on ait $m \leq u_n \leq M$.

On peut également utiliser : une suite est bornée si et seulement s'il existe un réel strictement positif M tel que, pour tout entier naturel *n* on ait $|u_n| \leq M$.

Exemple

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ est manifestement majorée par 1 et minorée par 0.

Définition

- Une suite (u_n) est dite **croissante** si et seulement si pour tout entier naturel *n* on a $u_n \leq u_{n+1}$. Elle est **strictement croissante** si et seulement si pour tout entier naturel *n* on a $u_n < u_{n+1}$.
  - Si $\forall n \in N \quad , n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite est décroissante à partir du rang n_0.
  - Si $\forall n \in N \quad , n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite est croissante à partir du rang n_0.

- La suite est strictement monotone si les inégalités sont strictes.

- Une suite (u_n) est dite **décroissante** si et seulement si pour tout entier naturel *n* on a $u_n \geq u_{n+1}$. Elle est **strictement décroissante** si et seulement si pour tout entier naturel *n* on a $u_n > u_{n+1}$

- Lorsque qu'une suite est croissante ou lorsque qu'une suite est décroissante, on dit que c'est une suite **monotone.**

Exemple

$u_n = \dfrac{1}{n}$ est une suite strictement décroissante, lorsque *n* « croît » u_n « décroît ».

$u_n = \sqrt{n^2+1}$ est une suite strictement croissante, lorsque *n* « croît » u_n « croît »

On s'autorisera ces abus de langage lorsque le résultat est aussi naturel. On devrait écrire pour la première : $\forall n \in N^*, \ \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$

et pour la deuxième : $\forall n \in N^*, \ \sqrt{n^2+1} < \sqrt{(n+1)^2+1}$

Remarque

- Lorsque que le terme général de la suite est de la forme $u_n = f(n)$,

  la croissance de *f* entraîne la croissance de la suite (u_n).

  la décroissance de *f* entraîne la décroissance de la suite (u_n).
- Lorsque la suite est définie de façon récurrente, il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemple

Etudions la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{2+u_{n-1}}$ *et* $u_1 = 0$. Vous pourrez tracer la courbe de la fonction *f* définie sur R^+ par $f(x) = \sqrt{2+x}$ et conjecturer.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - \sqrt{2+u_{n-1}} = \left(\sqrt{2+u_n} - \sqrt{2+u_{n-1}}\right) \times \frac{\sqrt{2+u_n} + \sqrt{2+u_{n-1}}}{\sqrt{2+u_n} + \sqrt{2+u_{n-1}}}$$

$$= \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{2+u_n} + \sqrt{2+u_{n-1}}}$$

Nous remarquons que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$ et de proche en proche que $u_2 - u_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$

La suite (u_n) est donc strictement croissante

1.2 Suite convergente

1.2.1 Limite d'une suite

Définition

Soit une suite numérique (u_n). On dit que la suite (u_n) **converge** vers un réel fini *l* si et seulement si la distance entre u_n et *l* tend vers 0 lorsque *n* tend vers l'infini.

Autrement dit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists n_0 \in N \ \ tel\,que \ \ \forall n \in N \,,\ \ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

l est la limite de la suite.

Lorsqu'une suite admet une limite finie on dit qu'elle est **convergente**.

Autrement, la suite est dite **divergente**, soit elle n'admet pas de limite, soit la limite est infinie.

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite. Elle diverge.

La suite de terme général $u_n = n$ admet une limite infinie. Elle diverge. On écrira :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A > 0 \,,\ \exists n_0 \in N \ \ tel\,que \ \ \forall n \in N \,,\ \ n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A$$

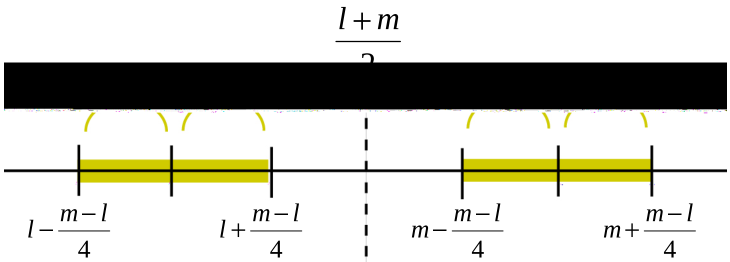
Vous pourrez écrire la divergence en $-\infty$.

Remarque

- Concrètement : dans tout intervalle de longueur non nulle $[l-\alpha; l+\alpha]$, on trouve tous les termes de la suite sauf éventuellement un nombre fini. Cela signifie également qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle.
- Lorsque la suite est convergente sa limite est unique. Cette propriété est mise en évidence tout simplement grâce à la remarque précédente. En effet, supposons que la suite admettent deux limites *l* et *m*, avec $l < m$.

  On pose $\alpha = \dfrac{m-l}{4}$.

  On considère alors les deux intervalles disjoints $[l-\alpha; l+\alpha]$ *et* $[m-\alpha; m+\alpha]$.



  Il faudrait pour *n* assez grand que u_n soit à la fois dans l'un et l'autre des deux intervalles, ce qui est impossible. Donc la limite, si elle existe, est unique.

Propriétés

Considérons deux suites numériques convergentes (u_n) et (v_n).

On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$

On peut alors énoncer les propriétés suivantes :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0$
- Toute suite convergente est bornée.
- si α et β sont deux réels quelconques, la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha l + \beta l'$$

- la suite $(u_n v_n)$ converge et on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = l . l'$$

- si $l' \neq 0$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge et on a : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{l}{l'}$

Démonstration

- Démontrons par exemple la deuxième propriété. On suppose que la suite converge vers l.

  Il existe un rang N à partir duquel tous les termes sont dans l'intervalle $[l-1;l+1]$, c'est à dire, $|u_n - l| \leq 1$. Donc, $|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| \leq 1 + |l|$.

  On pose $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_N|, |l|+1\}$, pour tout entier naturel n on a $|u_n| \leq M$, cela prouve que la suite est bornée.

- Démontrons la propriété du produit. Les deux suites sont convergentes et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$.

  On a :

  $$|u_n v_n - ll'| = |(u_n - l)v_n + (v_n - l')l| \leq |(u_n - l)||v_n| + |v_n - l'||l|$$

  La suite (v_n) converge, donc est bornée.

  $\exists M > 0 \ tel\ que\ \forall n \in N, \quad |v_n| \leq M$

  - **Cas 1** : On suppose $l = 0$, on a $|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq |u_n| M$.

    $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N^*, \forall n \in N, \ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

    Soit $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n \in N, \ n \geq N \Rightarrow |u_n v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon$

    Cela prouve que la suite $(u_n v_n)$ converge vers $ll' = 0$.

  - **Cas 2** : On suppose $l \neq 0$,

    $$\lim_{n\to+\infty} v_n = l' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in N^* \ tel\ que\ \forall n \in N, \ n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2|l|}$$

    $$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N^*, \ tel\ que\ \forall n \in N, \ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

Finalement : On pose $N = \max\{N_1, N_2\}$

$\forall n \in N, \ n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - ll'| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2|l|}|l| = \varepsilon$, ce qui prouve que la suite $(u_n v_n)$ converge vers ll'

Remarque

- On retrouve les formes indéterminées des limites de fonctions. Par exemple, Lorsque l' est nulle et l nulle, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ peut ou non converger
- Lorsque l' est nulle et l non nulle, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ diverge.
- Lorsque la suite est explicite et que son terme général est de la forme : $u_n = f(n)$, alors si la fonction admet une limite en $+\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, cette limite peut être finie, $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque

La réciproque est fausse : par exemple, la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sin(nx)$ n'admet pas de limite en $+\infty$. Pourtant, la suite (u_n) de terme général $u_n = \sin(n\pi) = 0$ est la suite constante nulle qui converge.

Exemple

- Considérons les suites (u_n) et (v_n) de terme général respectif :

  $u_n = \frac{1}{n+3}$ *et* $v_n = \frac{1}{n+8}$

  La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie par son terme général : $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+8}{n+3}$

  Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers 0 et la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente vers 1.

- Considérons les suites (u_n) et (v_n) de terme général respectif :

  $$u_n = \frac{1}{n} \quad et \quad v_n = \frac{1}{n^2}$$

  La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie par son terme général : $\frac{u_n}{v_n} = n$

  Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers 0 et la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ n'est pas convergente. Elle diverge vers $+\infty$.

1.2.2 Critère de convergence

Théorème

- Toute suite croissante et majorée, est convergente.
- De même, toute suite décroissante et minorée, est convergente.
- De façon plus générale, toute suite monotone (croissante ou décroissante) et bornée, est convergente.

Ces critères serviront essentiellement pour étudier les suites récurrentes.

Exercice **(MATH04E01A)**

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$u_n = \dfrac{5^n - 3^n}{5^n + 2^n}$, $v_n = \sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + n + 1}$, $w_n = \dfrac{1}{an^3 + 2n^2 + 1} \sum_{k=1}^{n} k^2$

1.2.3 Méthode pratique pour les suites récurrentes

Théorème

Soit (u_n), une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue. Si (u_n) converge vers l, alors $l = f(l)$.

Démonstration

(Non disponible)

Exemple

Reprenons l'exemple de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$ *et* $u_1 = 0$. Nous avons vu qu'elle était croissante. En traçant la courbe de la fonction f définie sur $[-2;+\infty[$ nous pouvons conjecturer que la suite est majorée par 2.

Démontrons-le par récurrence.

On pose l'hypothèse de récurrence $P_n \ : \ \forall n \in N \ , \ u_n \leq 2$.

P_0 est vraie.

Supposons que P_k est vraie pour tout $k \leq n$

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \\ u_n \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$$

ce qui prouve P_{n+1} vraie. Donc la suite (u_n) est majorée par 2.

Elle est croissante et majorée, donc elle converge. La fonction f étant continue sur $[-2;+\infty[$, la limite l vérifie : $l = \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l = 2 \ ou \ l = -1$.

Il est clair que la suite ayant tous ses termes positifs, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Vous pourrez programmer votre calculette, qui donnera les résultats suivants, arrondis au dix millièmes le plus proche, corroborant notre étude.

1,4142 ; 1,8478 ; 1,9616 ; 1,9904 ; 1,9976 ; 1,9994 ; 1,9998 ; 2…

Exercice **(MATH04E02A)**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2u_n}$ *et* $u_1 = 2$

Vous pourrez reprendre la méthode précédente :

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x}$
2) Conjecturer sur la monotonie et la convergence de la suite (u_n)
3) Montrer que la suite est minorée et strictement décroissante
4) Donner la valeur de la limite.

2 Suites particulières

2.1 Approche

Exemple

Problème : Un propriétaire d'un appartement propose deux formules de contrat de location.
Le loyer annuel initial est dans les deux cas de 30 000F.
Dans le contrat 1, le propriétaire impose une augmentation annuel du loyer de 5%.
Dans le contrat 2, le propriétaire impose une augmentation fixe et forfaitaire annuelle de 1750F.
Nous allons en fonction de la durée prévisible d'occupation de l'appartement aider au choix du contrat.
Essayons de modéliser le problème.
Soit u_n le montant du loyer la $n^{ième}$ année dans le cas du contrat 1.
Soit v_n le montant du loyer la $n^{ième}$ année dans le cas du contrat 2.
Nous avons par hypothèse : $u_0 = v_0 = 30\ 000F$
Et nous pouvons définir par récurrence les termes suivants.

$$u_n = u_{n-1} + \frac{5}{100} u_{n-1} = 1{,}05 u_{n-1}$$

$$v_n = v_{n-1} + 1750$$

Nous effectuons les calculs pour aboutir aux résultats suivants arrondis au franc le plus proche:

Année i	u_n	v_n	$\sum u_i$	$\sum v_i$
0	30 000	30 000	30 000	30 000
1	31 500	31 750	61 500	61 750
2	33 075	33 500	94 575	95 250
3	34 728	35 250	129 304	130 500
4	36 465	37 000	165 769	167 500
5	38 288	38 750	204 057	206 250
6	40 202	40 500	244 260	246 750
7	42 213	42 250	286 473	289 000
8	44 323	44 000	330 797	333 000
9	46 539	45 750	377 337	378 750
10	48 866	47 500	426 204	426 250
11	51 310	49 250	477 514	475 500

Nous constatons que le loyer est moins cher avec le contrat 1 jusqu'à l'année 7, et que la rentabilité du contrat 2 ne se fait sentir qu'au bout de l'année 11. Le locataire choisira le contrat 1 s'il reste au plus 10 ans et le contrat 2 sinon.
Nous allons définir de façon rigoureuse les deux suites qui sont intervenues dans cet exemple.

2.2 Suite arithmétique

2.2.1 Définitions

Définition

On considère une suite numérique (u_n) définie de façon récurrente par :

$$u_0 \text{ donné}$$
$$u_{n+1} = u_n + r$$

où r est un réel donné.

Pour définir un terme , on ajoute au terme précédent le même réel r.

La suite (u_n) ainsi définie est une suite arithmétique de raison r.

Par récurrence, on peut montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$u_0 \text{ donné}$$
$$u_n = u_0 + n\,r$$

En effet, la relation de définition de la suite permet d'écrire :

$$u_1 = u_0 + r$$
$$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$$
$$u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r$$
$$etc\ldots$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire correctement cette démonstration dont l'écriture est immédiate.

Exemple

- L'ensemble des entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
- L'ensemble des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.
- L'ensemble des nombres impairs est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.
- La suite (v_n) de l'exemple précédent est une suite arithmétique de premier terme 30000 et de raison 1750.

2.2.2 Propriétés

Remarque

- Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que la différence entre deux termes consécutifs quelconques est constante.
- Pour caractériser une suite arithmétique, il suffit de donner un terme quelconque et la raison. En effet, considérons une suite arithmétique connaissant sa raison *r* et le terme de rang *k* quelconque.

  $u_n = u_0 + nr$

  $u_k = u_0 + kr$

  Si on soustrait membre à membre, on obtient :

$$\boxed{u_n - u_k = (n-k)r \Leftrightarrow u_n = u_k + (n-k)r}$$

On retiendra cette formule générale qui peut s'employer avec *n* et *k* quelconques.

Exemple

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison *–2*. On donne $u_{17} = -32$, calculons u_{12}.
  On applique la formule précédente :
  $u_{12} = u_{17} + (12-17)\times(-2) = -32 + 10 = -22$

- Soit (u_n) une suite arithmétique. On donne $u_{17} = -32$, et $u_{12} = 74$. Calculons la raison.
  On applique la formule précédente :
  $u_{17} = u_{12} + (17-12)r \Leftrightarrow -32 = 74 + 5r \Leftrightarrow r = -\dfrac{106}{5}$

2.2.3 Somme de n termes consécutifs.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison *r* et de premier terme u_0.
On veut évaluer la somme $S = u_l + u_{l+1} + \cdots + u_{l+m}$ .de $(m+1)$ termes consécutifs.

En revenant à l'expression de chaque terme en fonction de son indice, on obtient :

$$\begin{aligned}
S &= (u_0 + lr) + (u_0 + (l+1)r) + \cdots + (u_0 + (l+m)r) \\
&= \underbrace{u_0 + u_0 + \cdots + u_0}_{(m+1)\ fois} + \underbrace{rl + rl + \cdots + rl}_{(m+1)\ fois} + r + 2r + \cdots + mr \\
&= (m+1)(u_0 + rl) + r(1 + 2 + \cdots + m) = (m+1)(u_0 + rl) + r\frac{m(m+1)}{2} \\
&= (m+1)\left(u_0 + rl + r\frac{m}{2}\right) = (m+1)\left(\frac{2u_0 + 2rl + mr}{2}\right) = (m+1)\left(\frac{u_0 + rl + u_0 + (m+l)r}{2}\right) \\
&= (m+1)\frac{u_l + u_{m+l}}{2}
\end{aligned}$$

On conclut que la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à la demi-somme du premier et du dernier multipliée par le nombre de termes.

Exercice **(MATH04E03A)**

On considère la suite arithmétique croissante (u_n), dont les 4 premiers termes sont des nombres entiers ayant pour somme 8 et pour produit –15. Calculer le 25$^{\text{ième}}$ terme de la suite.

2.3 Suite géométrique

2.3.1 Définitions

On considère une suite numérique (u_n) définie de façon récurrente par :

$$u_0 \text{ donné}$$
$$u_{n+1} = q.u_n$$

où q est un réel donné non nul.
Chaque terme est calculé en multipliant le terme précédent par le même réel q.
La suite (u_n) ainsi définie est une suite géométrique de raison q.

Si $q = 1$, il s'agit d'une suite constante.

Par récurrence, on peut montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$u_0 \text{ donné}$$
$$u_n = q^n u_0$$

En effet, la relation de définition de la suite permet d'écrire :

$$u_1 = q\,u_0$$
$$u_2 = q\,u_1 = q^2 u_0$$
$$u_3 = q\,u_2 = q^3 u_0$$
$$etc\ldots$$

Ainsi, la relation que nous cherchons à établir est vérifiée en particulier pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour n et montrons qu'elle est alors vérifiée pour $n+1$ (principe de la démonstration par récurrence). Ainsi, on a par hypothèse :

$$u_n = q^n u_0$$

et par définition :

$$u_{n+1} = q\,u_n$$

On en déduit donc immédiatement :

$$u_{n+1} = q^{n+1} u_0$$

qui traduit bien que la relation est également vérifiée pour $n + 1$.

D'après le principe de la démonstration par récurrence, on en déduit que cette relation est vérifiée pour tout $n \neq 0$.

Exemple

- La suite (u_n) de l'exemple introductif est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme 30 000. On retrouve $u_{10} = 30\,000 \times 1{,}05^{10} = 48\,866$.
- Si on plie en deux une feuille de papier A4 d'épaisseur 0,1mm, puis que l'on plie de nouveau en deux et que l'on recommence cette opération 50 fois, quelle épaisseur obtient-on ?

Le résultat est paradoxal et dépasse l'entendement. En effet, nous avons affaire à une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 0,1.

$$u_{50} = 0{,}1 \times 2^{50} mm \approx 1{,}2589 \times 10^{14} mm \approx 1{,}2589 \times 10^{11} m$$
$$\approx 1{,}2589 \times 10^{8} km \approx 126 \text{ millions de } km$$

Résultat qu'intuitivement vous n'auriez sans doute pas deviné.

2.3.2 Propriétés.

- Pour démonter qu'une suite est géométrique, il suffit de vérifier que le rapport de deux termes consécutifs quelconques est constant. Cette constante est la raison de la suite géométrique.
- Pour définir une suite géométrique, il suffit de connaître un terme quelconque et la raison. En effet,

$$\left.\begin{array}{l} u_m = u_0 q^m \\ u_n = u_0 q^n \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{u_m}{u_n} = q^{m-n}$$

Il suffira de retenir la formule générale liant deux termes quelconques d'une suite géométrique de raison q.

$$\boxed{u_m = u_n q^{m-n}}$$

Exemple

- On considère une suite géométrique de raison 2 et on donne $u_{10} = 1024$. Calculons u_{15}.
  On applique directement la formule ci-dessus :
  $u_{15} = u_{10} q^{15-10} = 1024 \times 2^5 = 2^{15}$

- On considère une suite géométrique de raison q et on donne $u_5 = 243$ et $u_7 = 2187$. Cherchons q.
  On applique directement la formule ci-dessus :
  $u_7 = u_5 q^{7-5} \Leftrightarrow 2187 = 243 q^2 \Leftrightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow q = 3 \text{ ou } q = -3$
  Attention dans cet exemple, il y a deux suites géométriques qui vérifient les hypothèses.

2.3.3 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$. On veut évaluer la somme

$$S = u_l + u_{l+1} + \cdots + u_{l+m}.$$

On revient à l'expression de chaque terme de la suite en fonction de son indice.

$$S = u_0 q^l + u_0 q^{l+1} + \cdots + u_0 q^{l+m} = u_0 q^l \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^m\right) = u_l \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

On peut dire que la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par la formule : $S=(\text{Pr}\,emier\ terme)\dfrac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$

Exemple

- Dans l'exemple introductif, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme 30 000.

  La somme des années de loyer jusqu'à la 11ième année est donc :

  $$S=v_0+v_1+\cdots+v_{11}=30\,000\times\frac{1-1{,}05^{12}}{1-1{,}05}=477\,514$$

- Cyrus II, chef des perses et roi d'Anzan, au VIième siècle voulut remercier Seta l'inventeur du jeu d'échec, qui lui procurait un immense plaisir. Il promit de donner à l'inventeur tout ce qu'il désirait.

  Celui-ci répondit qu'il ne voulait que quelques grains de riz, 1 sur la première case, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième et ainsi de suite jusqu'à 64ième case.

  Le roi parut surpris de cette demande apparemment ridicule.

  Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2. Nous pouvons dire que le nombre de graine de riz sur la dernière case est $u_{63}=2^{63}$

  La somme des grains de riz est alors :

  $$S=1+2+2^2+\cdots+2^{63}=\frac{1-2^{64}}{1-2}=2^{64}-1\approx 1{,}8\times10^{19}$$

  En approximant à 10^6 de façon exagérée le nombre de grains de riz dans un kilo, nous obtenons : $1{,}8\times10^{13}kg=1{,}8\times10^{10}tonnes$. Soit 18 milliards de tonnes.

  La production mondiale actuelle d'une année est d'environ 150 millions de tonnes.

  Evidemment le roi ne put honorer sa parole.

Exercice **(MATH04E04A)**

On considère la suite arithmétique croissante (u_n), telle que les termes u_1^2, u_2^2, u_3^2 forment dans l'ordre une suite géométrique et que $u_1+u_2+u_3=3$. Déterminer l'expression du terme général u_k, ainsi que la somme des 100 premiers termes de la suite (u_n).

2.4 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

2.4.1 Généralités

Définition

Soient a et b deux constantes réelles non nulles

Appelons S l'ensemble des suites (u_n) telles que pour tout entier n on ait : $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$.

Si on donne les deux premiers termes $u_0 \ et \ u_1$ de la suite (u_n), on définit celle-ci de manière unique. Cette suite est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Exemple

Cherchons les suites usuelles de ce type.

- La suite nulle convient
- Cherchons les suites constantes de l'ensemble S.

  $(u_n) \ telle \ que \ \ \forall n \in N \ , \ u_n = C$

  $(u_n) \in S \Leftrightarrow u_n = C = aC + bC \Leftrightarrow a + b = 1$

  Si $a + b = 1$ toute suite constante appartient à S.

  Si $a + b \neq 1$ seule la suite constante nulle appartient à S.
- Cherchons les suites géométriques de l'ensemble S.

  On suppose $u_0 \neq 0 \ et \ q \neq 0$, sinon la suite est nulle.

  $(u_n) \ telle \ que \ \ \forall n \in N \ , \ u_n = u_0 q^n$

  $(u_n) \in S \Leftrightarrow u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \Leftrightarrow u_0 q^n = au_0 q^{n-1} + bu_0 q^{n-2}$

  Or $u_0 \neq 0 \ et \ q \neq 0$ donc

  $(u_n) \ telle \ que \ \ \forall n \in N \ , \ u_n = u_0 q^n$

  $(u_n) \in S \Leftrightarrow q^2 - aq - b = 0$

  $q^2 - aq - b = 0$ s'appelle équation caractéristique.

Théorème

- Si $\Delta = a^2 + 4b > 0$ alors l'équation admet deux racines réelles positives q_1 *et* q_2

  On admettra que toute solution est une suite (u_n) de terme général : $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$ λ *et* μ constantes arbitraires.
- Si $\Delta = 0$ alors il y a une solution double q_0. On admettra que toute solution est une suite (u_n) de terme général $u_n = (\lambda + \mu n)q_0^n$
- Si . $\Delta < 0$ alors b est nécessairement négatif et toute solution est une suite (u_n) de terme général $u_n = \lambda\left(\sqrt{-b}\right)^n \cos\left(n\dfrac{a}{2\sqrt{-b}}\right) + \mu\left(\sqrt{-b}\right)^n \sin\left(n\dfrac{a}{2\sqrt{-b}}\right)$

  λ *et* μ sont des réels déterminés de façon unique par la donnée des valeurs initiales u_0 *et* u_1

Il n'est pas souhaitable de retenir ces formules par cœur, mais il est intéressant de savoir les utiliser. La démonstration de ce théorème nécessite des outils mathématiques que nous ne mettrons en place que plus tard.

2.4.2 Un exemple

Recherche de suites vérifiant : $\forall n \in N,\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$
Soit S l'ensemble de ces suites.

Nous n'allons pas employer directement le théorème et refaire en partie le travail d'approche.

- Cherchons des suites constantes vérifiant la relation.
  $\forall n \in N \ \ ,\ \ u_n = K \quad \Rightarrow \quad K = K + 2K \ \ \Rightarrow \quad K = 0$
  La seule suite constante vérifiant la relation récurrente est la suite nulle.
- Cherchons les suites arithmétiques :
  $\forall n \in N \ \ ,\ \ u_n = u_0 + nr \quad \Rightarrow \quad u_0 + (n+2)r = u_0 + (n+1)r + 2(u_0 + nr)$

  $$\left.\begin{array}{l} n = 0 \Rightarrow \ r = 2u_0 \\ n = 1 \Rightarrow \ -r = 2u_0 \end{array}\right\} \Rightarrow r = u_0 = 0$$

  La seule suite arithmétique qui vérifie la relation est la suite nulle.
- Cherchons les suites géométriques :

  $\forall n \in N \ \ ,\ \ u_n = u_0 q^n \quad \Rightarrow \quad u_0 + u_0 q^{n+2} = u_0 q^{n+1} + 2u_0 q^n$
  On retrouve la suite nulle avec $u_0 = 0$ et si $u_0 \neq 0$ alors :

  $q^2 - q - 2 = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ (q+1)(q-2) = 0$

Pour tout réel $u_0 \neq 0$, les suites de termes général $u_n = u_0(-1)^n$ *et* $v_n = u_0 2^n$ sont éléments de S. Nous savons d'après le théorème que l'ensemble des suites vérifiant la relation sont les suites (u_n) de terme général : $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$

Exercice **(MATH04E05A)**

Montrer que les nombres de Fibonacci sont donnés par la formule

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Exercice (MATH04E06)

On considère la suite (u_n) définie sur N^* par : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ *et* $u_1 = 1$. Etudier la convergence de cette suite et, le cas échéant, calculer sa limite.

Exercice (MATH04E07)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définie sur N^* par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad et \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

avec u_1 *et* v_1 strictement positifs.

1) Montrer que, pour tout $n > 1$, on a $u_n \geq v_n$.
2) Vérifier que les deux suites sont monotones.
3) Montrer que les deux suites ont une limite commune.

Exercice (MATH04E08)

- Soit (u_n) $n \in N^*$ une suite arithmétique de raison *r*.

  Calculer *n* et *r* connaissant $u_1 = -3$, $u_n = 6$ et $S_n = u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{57}{2}$.

- Soit (v_n) $n \geq 1$ une suite géométrique de raison *q*.

  Calculer *n* et v_1 connaissant $v_n = 7$, $q = \dfrac{1}{3}$ et $S_n = v_1 + \cdots + v_n = 2548$.

Exercice (MATH04E09)

Déterminer la nature et éventuellement la limite des suites suivantes:

a) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

b) $u_n = 3\sqrt{n^2 - 1} - 5n$

c) $u_n = \left(\dfrac{n}{5} - 1\right)^n = e^{n \ln\left(\frac{n}{5} - 1\right)}$

d) $u_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{1}{n}\right)$

Exercice (MATH04E10)

Soit la suite $(u_n)\quad n \in N$ définie par u_0 et la récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{11} u_n + 1800 \quad \forall n \in N$$

1) Déterminer u_0 pour que la suite $(u_n)\quad n \in N$ soit stationnaire (constante).

2) On choisit pour la suite $u_0 = 1$

- Déterminer b pour que la suite $(v_n)\quad n \in N$ définie par $v_n = u_n + b \quad \forall n \in N$ soit une suite géométrique.
- Justifier la convergence de $(v_n)\quad n \in N$ et donner sa limite.
- Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice (MATH04E11)

Soit la suite récurrente définie sur N par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3} \end{cases}, \quad \forall n \geq 1$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n : $-1 \leq u_n \leq 0$
2) Démontrer que la suite définie sur N par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$ est arithmétique.
3) En déduire la limite de la suite $(v_n)\quad n \in N$, puis celle de $(u_n)\quad n \in N$.

Exercice ? (MATH04S01)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 12}{u_n + 4} \qquad v_n = 4 - u_n \qquad \text{avec } u_1 = 2.$$

1. Vérifier que, pour tout n, $0 \leq u_n \leq 4$.
2. Montrer que les deux suites sont monotones.
3. Etudier la convergence des deux suites et déterminer, le cas échéant, leurs limites.
4. Montrer que $\forall n \geq 1, v_{n+1} < \dfrac{v_n}{4}$.
5. Déterminer une valeur seuil N de n, telle que, pour $n \geq N$, $|u_n - 4| < 10^{-6}$.

Exercice ? (MATH04S02)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 14}{u_n + 1} \qquad v_n = \frac{u_n - 7}{u_n + 2} \qquad \text{avec } u_1 = 1$$

1. Etudier la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite éventuelle.
2. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et conclure.

Exercice (MATH04E01B)

Etudier la convergence et, le cas échéant, déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{2\times 4} + \frac{2}{3\times 5} + \cdots + \frac{2}{n(n+2)} \quad et \quad v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(3k+2)}{\sum_{k=1}^{n} k}$$

Exercice (MATH04E01C)

Etudier la convergence et, le cas échéant, déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = 2^n \cos\frac{\pi}{2^n} \quad , \quad v_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} \quad et \quad w_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{a}{2^k} \qquad \left(avec\ \ 0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

Exercice (MATH04E02B)

On donne la suite (u_n) définie par sa formule de récurrence et son premier terme:

$$\begin{cases} u_1 \\ \forall n \in N^*, \qquad u_{n+1} = 2 + \dfrac{4}{u_n + 1} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe deux valeurs de u_1 pour lesquelles la suite est constante.

On suppose que la suite n'est pas constante et que $u_1 > -1$

Démonter par récurrence que la suite est minorée par –1.

On pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}$ *pour* $n \in N^*$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Trouver la limite de (v_n) quand *n* tend vers l'infini.

Exprimer u_n en fonction de v_n, en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice (MATH04E02C)

On donne la suite (u_n) définie par sa formule de récurrence et son premier terme:

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in N^*, \qquad u_n = \dfrac{u_{n-1} - 8}{2u_{n-1} - 9} \end{cases}$$

En utilisant la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{x-8}{2x-9}$ vous essaierez de conjecturer sur le comportement de la suite (u_n).

Démonter que la suite (u_n) est majorée par 1.

Démontrer que la suite est croissante et qu'elle est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice (MATH04E04B)

On considère la suite (u_n), définie par $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des paramètres réels.

Montrer qu'il existe une suite géométrique (v_n) telle que $v_n = u_n + c$ et déterminer la raison de la suite (v_n) ainsi que la valeur de la constante c.

Calculer le terme général v_n en fonction de u_1 , a et b

En déduire l'expression de u_n.

Calculer la somme S_n des n premiers termes de la suite (u_n).

Exercice (MATH04E05B)

Déterminer la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \\ u_0 = 3 \quad et \quad u_1 = 5 \end{cases}$$

Exercice (MATH04E05C)

Déterminer la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \\ u_0 = 1 \quad et \quad u_1 = 2 \end{cases}$$

Solution (MATH04E06)

- La suite n'admet que des termes positifs.

  Montrons qu'elle est majorée par 2 par récurrence.

  On pose l'hypothèse de récurrence : $P_n \ : \ u_n < 2$

  La proposition est vraie à l'ordre 1.

  Supposons la propriété vérifiée jusqu'au rang *n*.

  $$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \\ u_n < 2 \end{cases} \Rightarrow \ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} < \sqrt{2+2} = 2$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$, elle est donc vraie pour tout $n > 0$.

- Evaluons

  $$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - \sqrt{u_{n-1} + 2} = \frac{\left(\sqrt{u_n + 2} - \sqrt{u_{n-1} + 2}\right)\left(\sqrt{u_n + 2} + \sqrt{u_{n-1} + 2}\right)}{\sqrt{u_n + 2} + \sqrt{u_{n-1} + 2}}$$

  $$= \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{u_n + 2} + \sqrt{u_{n-1} + 2}}$$

  Le dénominateur étant strictement positif, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$, et de proche en proche, du signe de $u_2 - u_1 = \sqrt{3} - 1 > 0$.

  La suite est donc strictement croissante et majorée donc convergente.

  La fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est continue, la limite *l* vérifie donc :

  $$\begin{cases} l > 0 \\ l = \sqrt{l+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l > 0 \\ l^2 = l + 2 \end{cases} \Rightarrow l = 2$$

Retour

Solution (MATH04E07)

1) On effectue la différence :

$$u_n - v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \frac{u_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} + v_{n-1}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}}\right)^2}{2} \geq 0$$

donc pour tout $n > 1$, on a $u_n \geq v_n$

2) On calcule les différences des termes successifs.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n = \frac{\left(\sqrt{u_n v_n} - v_n\right)\left(\sqrt{u_n v_n} + v_n\right)}{\sqrt{u_n v_n} + v_n} = \frac{u_n v_n - v_n^2}{\sqrt{u_n v_n} + v_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n\left(u_n - v_n\right)}{\sqrt{u_n v_n} + v_n} \geq 0$$

La suite $\left(u_n\right)$ est donc décroissante et la suite $\left(v_n\right)$ est croissante.

3) On exprime la différence $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_{n+1}$.

$$\begin{cases} u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_{n+1} \\ v_{n+1} < v_n \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$$

Ainsi de proche en proche, on obtient :

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{u_n - v_n}{2} \leq \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2^2} \leq \cdots \leq \frac{u_1 - v_1}{2^n}$$

On trouve que cette différence tend vers 0, les deux suites ont bien une limite commune.

Retour

Solution **(MATH04E08)**

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2S_n}{u_1 + u_n} = \frac{57}{-3+6} = 19$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{u_n - u_1}{n-1} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

b) $S_n = v_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{v_1 - v_1 q^n}{1-q} = \dfrac{v_1 - v_1 q^{n-1} q}{1-q} = \dfrac{v_1 - v_n q}{1-q}$

$$v_1 = S_n(1-q) + q v_n = \frac{2}{3}\,2548 + \frac{7}{3} = 1701 = 7.3^5$$

$$v_n = v_1 q^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 7.3^5 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow 5 = n-1 \Leftrightarrow n = 6$$

Retour

Solution (MATH04E09)

a) $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) $u_n = 3\sqrt{n^2-1} - 5n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3\sqrt{n^2-1}-5n\right)\left(3\sqrt{n^2-1}+5n\right)}{\left(3\sqrt{n^2-1}+5n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{9n^2-9-25n^2}{3\sqrt{n^2-1}+5n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-16n^2}{3n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+5n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-16n}{3\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+5} = -\infty$$

La suite (u_n) diverge.

c) $u_n = \left(\frac{n}{5}-1\right)^n$ suite définie si $\frac{n}{5}-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad n>5$

$u_n = e^{n\ln\left(\frac{n}{5}-1\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{5}-1\right) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\ln\left(\frac{n}{5}-1\right)\right) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

(u_n) diverge.

d) $u_n = \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$

$u_n = \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Retour

Solution (MATH04E10)

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{11}u_n + 1800 \quad \forall\ n \in N \end{cases}$$

1) (u_n) est stationnaire $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} = u_n = u_0 \quad \forall\ n \in N$

La relation de récurrence s'écrit alors:

$$u_n = \frac{1}{11}u_n + 1800 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{11}u_n = 1800 \quad \Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1800}{10}11 = 1980$$

Donc $\quad u_0 = 1980$

2) $u_0 = 1$

- (v_n) est géométrique $\quad \Rightarrow \quad \exists\ q \in R$ tel que $v_{n+1} = qv_n \quad \forall\ n \in N$
  or :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + b = \frac{1}{11}u_n + 1800 + b = \frac{1}{11}(v_n - b) + 1800 + b$$
$$= \frac{1}{11}v_n - \frac{1}{11}b + 1800 + b$$

$$\Rightarrow \quad v_{n+1} = \frac{1}{11}v_n + \frac{10}{11}b + 1800$$

  Il suffit de prendre b tel que $\quad \frac{10}{11}b + 1800 = 0 \quad$ soit $\quad b = -1980$

  et dans ce cas, la raison de (v_n) est $\frac{1}{11}$.

- (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{11} < 1$, donc elle converge et sa limite est 0.

- $u_n = v_n - b = v_n + 1980 \quad \Rightarrow \quad lim\ u_n = lim\ v_n + 1980 = 0 + 1980 = 1980$

Retour

Solution (MATH04E11)

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3} \end{cases} \quad \forall n \geq 1$$

1) Démontrons la double inégalité par récurrence sur n

$u_0 = 0$ donc la double inégalité est vraie pour $n = 0$

supposons la double inégalité vraie jusqu'à l'ordre n $-1 \leq u_n \leq 0$
a-t-on $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$?

Soit f la fonction définie sur $[-1,0]$ par: $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

$$f'(x) = \frac{x+3-x+1}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ est croissante}$$

$$\left.\begin{array}{l} -1 \leq u_n \leq 0 \\ f \text{ est croissante} \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) \leq f(u_n) \leq f(0)$$

or $f(-1) = \dfrac{-1-1}{-1+3} = -1$ $\quad f(0) = -\dfrac{1}{3}$ $\quad f(u_n) = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} = u_{n+1}$

donc $-1 \leq u_{n+1} \leq -\dfrac{1}{3}$, ce qui prouve, $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$

2)

$$v_n = \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{\dfrac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3} + 1} = \frac{u_{n-1} + 3}{2u_{n-1} + 2} = \frac{u_{n-1} + 1 + 2}{2(u_{n-1} + 1)} = \frac{u_{n-1} + 1}{2(u_{n-1} + 1)} + \frac{2}{2(u_{n-1} + 1)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{u_{n-1} + 1} = \frac{1}{2} + v_{n-1}$$

$\Rightarrow$ (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3) La raison de (v_n) est strictement positive $\Rightarrow$ $\lim v_n = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} v_n = \dfrac{1}{u_n + 1} \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n} - 1 \\ \lim v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim u_n = 0 - 1 = -1$$

Retour

Solution (MATH04E01A)

- Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On met en évidence les termes prédominants :

$$u_n = \frac{5^n - 3^n}{5^n + 2^n} = \frac{5^n\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} = \frac{\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}$$

On a clairement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} = 1$

- Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

$$v_n = \sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+n+1} = \frac{\left(\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2+n+1}\right)}{\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2+n+1}}$$

$$= \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2+n+1}} = \frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{5}{n}} + n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{\left(4-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{5}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

On a clairement : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(4-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{5}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 2$

- Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

Si $a = 0$, alors la suite diverge vers $+\infty$. Supposons $a \neq 0$

On rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$w_n = \frac{1}{an^3+2n^2+1} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6n^3\left(a+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6\left(a+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}$$

On a clairement : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6\left(a+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{3a}$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice Retour

Solution (MATH04E01B)

- Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ si elle existe.

  On utilise un résultat classique : $\forall n \in N^*,\quad \dfrac{2}{n(n+2)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}$

$$u_n = \frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{2\times 4} + \frac{2}{3\times 5} + \cdots + \frac{2}{n(n+2)}$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}$$

  La suite (u_n) dont le terme général est de la forme $u_n = f(n)$ admet donc une limite lorsque n tend vers l'infini.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f(n) = \frac{3}{2}$$

- Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ si elle existe

  On utilise le résultat $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$v_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k} = 3 + \frac{2n}{\frac{n(n+1)}{2}} = 3 + \frac{4}{n+1}$$

  La suite (v_n) dont le terme général est de la forme $v_n = f(n)$ admet donc une limite lorsque n tend vers l'infini.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} f(n) = 3$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH04E01C

- $u_n = 2^n \cos\dfrac{\pi}{2^n}$

La fonction cosinus étant décroissante sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad \Rightarrow \quad 2^{n-1} \leq 2^n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = u_n$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$

- $v_n = 2^n \sin\dfrac{\pi}{2^n}$

La suite (v_n) a son terme général de la forme $v_n = f(n)$.

$v_n = 2^n \sin\dfrac{\pi}{2^n} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{\pi}{2^n}}\pi$. La suite est donc convergente et

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2^n} = 0 \\ \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{\pi}{2^n}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{\pi}{2^n}}\pi\right) = \pi$$

finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n \sin\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \pi$

- $w_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{a}{2^k} \qquad \left(\text{avec } \; 0 < a < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{a}{2^k} = \cos\frac{a}{2} \times \cos\frac{a}{2^2} \times \cdots \times \cos\frac{a}{2^{n-1}} \times \cos\frac{a}{2^n} \times \frac{\sin\dfrac{a}{2^n}}{\sin\dfrac{a}{2^n}}$$

$$= \frac{1}{\sin\dfrac{a}{2^n}} \cos\frac{a}{2} \times \cos\frac{a}{2^2} \times \cdots \times \cos\frac{a}{2^{n-1}} \times \left(\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{a}{2^n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{a}{2^n}} \cos\frac{a}{2} \times \cos\frac{a}{2^2} \times \cdots \times \cos\frac{a}{2^{n-1}} \times \sin\frac{a}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{a}{2^n}} \cos\frac{a}{2} \times \cos\frac{a}{2^2} \times \cdots \times \cos\frac{a}{2^{n-2}} \times \frac{1}{2}\sin\frac{a}{2^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{2^2 \sin\dfrac{a}{2^n}} \cos\frac{a}{2} \times \cos\frac{a}{2^2} \times \cdots \times \cos\frac{a}{2^{n-3}} \times \frac{1}{2}\sin\frac{a}{2^{n-3}}$$

De proche en proche on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n} cos\frac{a}{2^k} = \frac{\sin a}{2^n\, sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{\sin a}{a} \times \frac{\frac{a}{2^n}}{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \quad avec \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a}{2^n}}{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = 1$$

Finalement : la suite est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} cos\frac{a}{2^k} = \frac{\sin a}{a}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH04E02A)

- La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^2}$.

  La fonction est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $]1;+\infty[$. De plus $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2x}$. La courbe admet donc la droite d'équation réduite $y = \dfrac{1}{2}x$ comme asymptote en $+\infty$. Elle est située au dessus de son asymptote sur $]0;+\infty[$.

- On utilise la droite d'équation $y = x$, pour construire les termes de la suite.
  On s'aperçoit que la suite **semble** strictement décroissante et qu'elle tend vers 1.

- On a $u_1 > 1$, on suppose que les termes de la suite sont strictement plus grands que 1 jusqu'à l'ordre *n*. $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2u_n} = f(u_n)$. D'après l'étude précédente $f(x) > 1$ *sur* $]1;+\infty[$, donc $u_{n+1} = f(u_n) > 1$ ce qui prouve la propriété pour tout *n*.
  La suite est donc minorée par 1.
  $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2+1}{2u_n} - u_n = \dfrac{1-u_n^2}{2u_n} < 0$, donc la suite est strictement décroissante.

  La suite est donc décroissante et minorée, donc elle converge. De plus la fonction f est continue sur $]1;+\infty[$, la limite vérifie donc :

  $$f(l) = l \Leftrightarrow l = \frac{l^2+1}{2l} \Leftrightarrow l = 1 \ sur \ ]0;+\infty[$$

  La suite (u_n) est donc décroissante et convergente, de limite 1.

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH04E02B)

1. Supposons la suite constante :

   $$\forall n \in N \quad , \quad u_n = C \quad \Rightarrow \quad C = 2 + \frac{4}{C+1} \Leftrightarrow C^2 - C - 6 = 0 \Leftrightarrow (C+2.)(C-3) = 0$$

   Il y a donc deux suites constantes définies par :

   $$\forall n \in N \quad , \quad u_n = -2 \qquad et \qquad \forall n \in N \quad , \quad u_n = 3$$

2. $u_1 > -1 \Rightarrow u_1 + 1 > 0 \Rightarrow u_2 = \frac{4}{u_1 + 1} + 2 > 0$. Ensuite, si on suppose que tous les termes de la suites sont positifs jusqu'au rang *n*, alors il est clair que $u_{n+1} = 2 + \frac{4}{u_n + 1} > 0$, ce qui prouve que tous les termes de la suites sont positifs à partir du rang 2. La suite est donc minorée par –1.

3. Calculons $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 2} = \frac{2 + \frac{4}{u_n + 1} - 3}{2 + \frac{4}{u_n + 1} + 2} = \frac{\frac{-u_n + 3}{u_n + 1}}{\frac{4u_n + 8}{u_n + 1}} = -\frac{1}{4}\frac{u_n - 3}{u_n + 2} = -\frac{1}{4}v_n$

   Cela prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$, de terme général $v_n = v_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

4. $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2} \Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n + 3}{1 - v_n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 3$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH04E02C

1) Fonction hyperbole strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{9}{2}\right[$. En observant le dessin, on s'aperçoit que la suite croît vers 1. Elle semble majorée par 1.

2) Démontrons que la suite est majorée par 1.
On effectue un raisonnement par récurrence. $u_0 \in \left]-\infty;1\right[$, supposons que tous les termes de la suite soient plus petits que 1 jusqu'au rang *n*. La fonction *f* est strictement croissante sur $u_0 \in \left]-\infty;\frac{9}{2}\right[$ donc sur $\left]-\infty;1\right[$. Donc si $x \in \left]-\infty;1\right[$ alors $f(x) \in \left]\lim_{x\to-\infty} f(x); f(1)\right[\Leftrightarrow f(x) \in \left]\frac{1}{2};1\right[$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$, donc comme par récurrence $u_n \in \left]-\infty;1\right[$ on en déduit que $u_{n+1} \in \left]-\infty;1\right[$. La propriété est donc vraie pour tout *n*.

3) On a :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{u_{n-1}-8}{2u_{n-1}-9} - u_{n-1} = \frac{-2u_{n-1}^2+10u_{n-1}-8}{2u_{n-1}-9} = 2\frac{(u_{n-1}-1)(-u_{n-1}+4)}{2u_{n-1}-9}$$

$$Or\ \ 2u_{n-1}-9<0\ \ et\ \ u_{n-1}-1<0\ \ et\ \ -u_{n-1}+4>0$$

Donc $\forall n \in N\ ,\ u_n - u_{n-1} > 0$, ce qui prouve que la suite est croissante.

La suite est croissante et majorée, donc elle converge. La fonction *f* étant continue, la limite est solution de l'équation : $l = f(l)$.

On résout : $l = \frac{l-8}{2l-9} \Rightarrow 2l^2 - 9l = l - 8 \Rightarrow l^2 - 5l + 4 = 0 \Rightarrow l = 1\ ou\ \ l = 4$.
Les termes de la suite étant tous plus petits que 1, la limite est nécessairement 1.

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH04E03A)

Appelons u_1 le premier terme de la suite.

Le calcul va se révéler plus aisé si on symétrise les 4 termes de la suite. On pose la raison égale à $2a$

$$u_1+u_2+u_3+u_4=(x-3a)+(x-a)+(x+a)+(x+3a) \qquad avec\ \ x=\frac{u_2+u_3}{2}$$

Alors

$$S=x=2$$

$$P=(2-3a)(2-a)(2+a)(2+3a)=\left(4-a^2\right)\left(4-9a^2\right)=9a^4-40a^2+16=-15$$

On cherche a en résolvant l'équation :

$$9a^4-40a^2+31=0 \iff \left(a^2-1\right)\left(9a^2-31\right)=0$$

$$\iff (a+1)(a-1)\left(3a-\sqrt{31}\right)\left(3a+\sqrt{31}\right)=0$$

La suite étant croissante seules conviennent les valeurs de a positives. De plus on désire des termes entiers.

La seule valeur de a qui convienne est 1.

On a donc

$$u_{25}=u_1+(25-1)(2\times 1)$$
$$u_1=x-3a=2-3=-1$$
$$u_{25}=-1+48=47$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH04E04A)

$u_1 + u_2 + u_3 = (u_2 - r) + u_2 + (u_2 + r) = 3u_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 1$

De même, on obtient :

$$u_1^2 \times u_3^2 = \frac{1}{q} u_2^2 \times q u_2^2 = u_2^4 = 1 \;\Rightarrow\; u_1 \times u_3 = 1 \;\; ou \;\; u_1 \times u_3 = -1$$

On connaît $u_1 \; et \; u_3$ par leur somme et leur produit.

$$\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \; ou \; \begin{cases} S = 2 \\ P = -1 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 \; et \; u_3 \; solutions \; de \; \left| \begin{array}{l} X^2 - 2X - 1 = 0 \\ ou \\ X^2 - 2X + 1 = 0 \end{array} \right.$$

La deuxième équation donne une solution double $u_1 = u_2 = u_3$, qui convient car la croissance n'est pas stricte. $u_k = 1 \; et \; S_{100} = 100$

La suite étant croissante, la première équation donne comme solution la suite arithmétique de raison $\sqrt{2}$:

$$u_1 = 1 - \sqrt{2} \;,\; u_2 = 1 \quad et \quad u_3 = 1 + \sqrt{2}$$

Donc le terme général est :

$$u_k = 1 + (k-2)\sqrt{2}$$

$$S_{100} = \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 = \frac{1 - \sqrt{2} + 1 + 98\sqrt{2}}{2} \times 100 = 50\left(2 + 97\sqrt{2}\right)$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH04E04B)

1) On cherche une suite (v_n) telle que $\forall n \in N \ , \ v_{n+1} = qv_n$.

On élimine les cas triviaux $a = 0 \quad ou \quad a = 1$

$\forall n \in N \ , \ v_{n+1} = qv_n$, cette condition implique :

$$\forall n \in N \quad , \quad v_{n+1} = au_n + b + c = qv_n = q(u_n + c) \ \Rightarrow \ (a - q)u_n + b + c - qc = 0$$

Cette égalité vraie pour tout n implique : $a = q \ \ et \ \ c = \dfrac{b}{a-1}$

2) En utilisant les propriétés des suites géométriques :

$$\forall n \in N^* \ , \ v_n = v_1 q^{n-1} \Rightarrow \ v_n = (u_1 + c)q^{n-1} = \left(u_1 + \frac{b}{a-1}\right)a^{n-1}$$

3) Il en résulte que :

$$v_n = \left(u_1 + \frac{b}{a-1}\right)a^{n-1} = u_n + c \ \Rightarrow \ u_n = \left(u_1 + \frac{b}{a-1}\right)a^{n-1} - c$$

4) On utilise la somme des termes de la suite géométrique :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (v_k - c) = \sum_{k=1}^{n} v_k - nc = -nc + v_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = -nc + \left(u_1 + \frac{b}{a-1}\right)\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur

Solution (MATH04E05A)

La suite de Fibonacci est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \ , \ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ \ pour \ n \geq 2 \end{cases}$$

L'équation caractéristique est donc : $q^2 - q - 1 = 0$ qui admet deux racines $q_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Toute solution est une suite (u_n) de terme général

$$u_n = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

On utilise maintenant les deux conditions initiales.

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= 0 = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \lambda + \mu \\ F_1 &= 1 = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ce qui donne le résultat attendu :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH04E05B)

La suite est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3\ ,\ u_1 = 5 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \ \ pour\ \ n \geq 2 \end{cases}$$

L'équation caractéristique est donc : $q^2 - 2q - 3 = 0$ qui admet deux racines $q_1 = -1 \ \ et \ \ q_2 = 3$. Toute solution est une suite (u_n) de terme général $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 3^n$

On utilise maintenant les deux conditions initiales.

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 3 = \lambda(-1)^0 + \mu 3^0 = \lambda + \mu \\ u_1 = 5 = \lambda(-1) + 3\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Ce qui donne le résultat : $u_n = (-1)^n + 2 \times 3^n$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH04E05C

La suite est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \ \ pour \ n \geq 2 \end{cases}$$

L'équation caractéristique est donc : $q^2 - q + 1 = 0$ dont le discriminant est négatif.

Toute solution est une suite (u_n) de terme général

$$u_n = \lambda\left(\sqrt{1}\right)^n cos\left(n\frac{1}{2\sqrt{1}}\right) + \mu\left(\sqrt{1}\right)^n sin\left(n\frac{1}{2\sqrt{1}}\right) = \lambda\, cos\left(\frac{n}{2}\right) + \mu\, sin\left(\frac{n}{2}\right)$$

On utilise maintenant les deux conditions initiales.

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 1 = \lambda \\ u_1 = 2 = \lambda\, cos\frac{1}{2} + \mu\, sin\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \dfrac{2 - cos\frac{1}{2}}{sin\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Ce qui donne le résultat : $u_n = cos\left(\frac{n}{2}\right) + \dfrac{2 - cos\frac{1}{2}}{sin\frac{1}{2}} sin\left(\frac{n}{2}\right)$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Aide ((MATH04E01A)

Dans chacune des 3 suites, on notera qu'il s'agit de limite de forme indéterminée : le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini.
La technique dans ce cas est en général d'isoler en le mettant en facteur le terme tendant le plus vite vers l'infini, au numérateur et au dénominateur.
Pour le troisième, on pourra montrer par récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Retour

Aide (MATH04E01B)

Pour la première suite, on fera une décomposition en éléments simples de $\dfrac{2}{n(n+2)}$

C'est-à-dire que l'on essaiera de mettre la fraction sous la forme $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+2}$

Pour la seconde suite, on décomposera le numérateur en

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)=3\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}1$$

Dans les deux cas, on utilisera le critère de monotonie bornée.

Retour

Aide (MATH04E01C)

On montrera que les suites sont monotone bornées, ou qu'elles ne le sont pas.

Retour

Aide (MATH04E02A)

- L’étude de f ne pose pas de problème. Profitez-en pour réviser les asymptotes obliques.
- Utilisez la droite d’équation $y = x$, pour construire les termes de la suite. La conjecture doit vous permettre de voir que la suite semble strictement décroissante et qu’elle semble tendre vers 1.

Retour

Aide (MATH04E02B)

- Vous devez trouver deux suites constantes de terme général –2 et 3.
- Il faut prouver par récurrence que tous les termes de la suite sont plus grands que –1.
- La raison de la suite est $-\frac{1}{4}$
- Exprimer u_n en fonction de v_n et conclure.

Retour

Aide (MATH04E02C)

Vous devez vous en sortir avec la même démarche que l'exercice précédent.

Retour

Aide (MATH04E03A)

Le calcul est plus facile si les 4 premiers termes sont symétrisés :
$u_1 = x - 3a$, $u_2 = x - a$, $u_3 = x + a$, $u_4 = x + 3a$
Deux nombres dont on connaît la somme S et le produit P sont solutions de
$X^2 - SX + P = 0$

Retour

Aide (MATH04E04A)

On utilisera les formules donnant les moyennes arithmétiques et géométriques

$$u_1 + u_3 = 2u_2 \ , \quad v_1 v_3 = v_2^2$$

Retour

Aide (MATH04E04B)

Utiliser la définition des suites géométriques par récurrence :

$$v_{n+1} = qv_n$$

puis les différentes formules du cours

Retour

Aide (MATH04E05A)

Il suffit d'appliquer les formules du cours. Ici l'équation caractéristiques est $q^2 - q - 1 = 0$.
Ensuite les conditions initiales permettent de trouver les constantes.

Retour

Aide (MATH04E05B)

Même exercice que le précédent.

Il suffit d'appliquer les formules du cours. Ici l'équation caractéristiques est $q^2 - 2q - 3 = 0$.
Ensuite les conditions initiales permettent de trouver les constantes.

Retour

Aide (MATH04E05C)

Même exercice que le précédent.

Il suffit d'appliquer les formules du cours. Ici l'équation caractéristiques est $q^2 - q + 1 = 0$.
Ensuite les conditions initiales permettent de trouver les constantes.

Retour