6. DEVELOPPEMENTS LIMITES

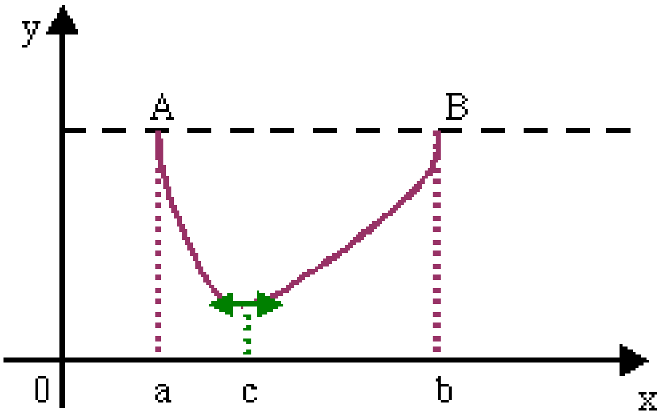
1. Généralités.

1.1. Théorème de Rolle.

Soit $f:[a,b] \to R$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que

$$f(a) = f(b).$$

Alors il existe au moins un réel c de l'intervalle $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

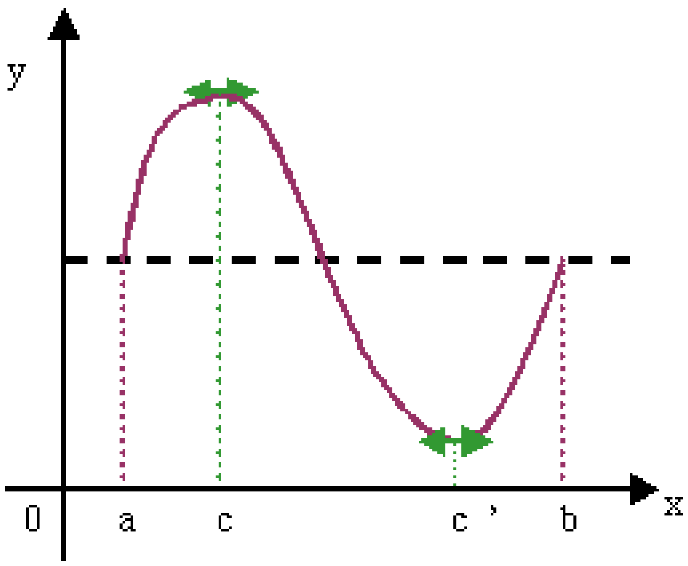


Interprétation géométrique :

Le théorème de Rolle montre qu'entre les points A et B d'abscisses a et b de la courbe représentative de *f*, il existe au moins un point C de la courbe distinct de A et de B où la tangente est parallèle à la droite (AB).

Remarque

1) Il existe au moins une valeur c mais il peut en exister plusieurs comme le montre la figure suivante :



Remarque

D'après le théorème de Rolle, si *f* est dérivable sur un intervalle *I*, entre deux zéros de *f* situés dans *I*, il y a au moins un zéro de *f'*. Par suite, si *f* possède *n* zéros distincts dans *I*, *f* ' possède au moins (*n*–1) zéros distincts dans *I*.

Exemple

Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = x\ln(2-x)$.

f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. De plus $f(0) = f(1) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle. Il existe au moins un réel c élément de $]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$, soit $f'(c) = \ln(2-c) + \dfrac{c}{c-2} = 0$. La calculette donne $c \approx 0,545267$

(*f'* est d'ailleurs strictement décroissante sur $]0,1[$, donc *c* est unique).

Exercice (MATH06E01A)

Soit $(a,b,c) \in R^3$. Montrer que l'équation $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0$ admet au moins une solution x dans $]0,1[$.

1.2. Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to R$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que

$$f(a) = f(b).$$

Alors il existe au moins un réel c de l'intervalle $]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Remarque

En posant $b = a + h$ et $c = a + \theta h$c = a+θh, $0 < \theta < 1$, la formule précédente s'écrit aussi

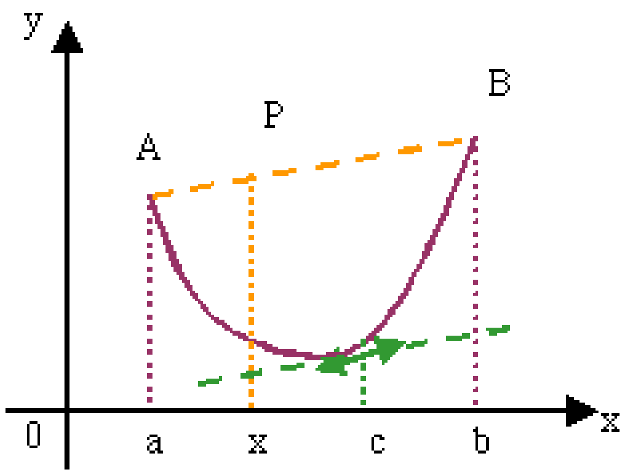
$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a+\theta h) \text{ avec } \quad 0 < \theta < 1$$

θ dépend à priori de a et de h.

Interprétation géométrique :

Le théorème des accroissements finis montre qu'entre les points A et B de la courbe représentative de *f*, il existe au moins un point de la courbe où la tangente est parallèle à la corde (AB).

En effet, le coefficient directeur de la droite (AB) est : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Exemple d'utilisation numérique:

Calcul d'erreur : donner un encadrement de sin(61°)

On applique le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction *f* définie par :

$f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle [60,61], (a=60 et h=1°=$\dfrac{\pi}{180}$radians)

sin(60+1)–sin(60) = $\dfrac{\pi}{180}$cos(60+θh) < $\dfrac{\pi}{180}$cos(60)

Car cosinus est décroissante sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc sur $[60,61]$.

Sin(60+1)−sin(60) < $\frac{\pi}{180}$0,5. Comme la fonction sinus est décroissante sur $[0,90]$ alors

$\sin 60 < \sin 61 < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360}$ et finalement $0,866 < \sin(61) < 0,875$

Exercice **(MATH06E02A)**

En appliquant le théorème des accroissements finis, démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = +\infty .$$

1.3. Inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to R$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et m et M deux réels tels que $\forall x \in]a,b[$, $m \le f'(x) \le M$.

Alors $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$

En particulier, si *f* est dérivable sur un intervalle *I* et s'il existe un réel *k* tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \le k$$

Alors *f* est *k*-lipschitzienne sur *I* c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in I^2 , \quad |f(x) - f(y)| \le k|x-y|$$

2. Relations de comparaison

Rappelons que $\overline{R} = R \cup \{-\infty ; +\infty\}$.

Toutes les fonctions utilisées sont définies au voisinage d'un élément x_0 de $\overline{R}$, sur un intervalle *I* non vide et non réduit à un point. Comme on ne s'intéresse qu'au comportement des fonctions au voisinage de x_0, on supposera que celles-ci ne s'annulent pas sur *I* sauf peut-être en x_0.

2.1. Équivalence.

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, si et seulement s'il existe une fonction h définie dans un voisinage de x_0, telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = g(x)\,h(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1 \end{cases}.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$

On adoptera, afin de simplifier l'écriture, l'abus de langage $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$

Exemple

a) $\sin x \underset{0}{\sim} x$ $\tan x \underset{0}{\sim} x$ $\ln x \underset{1}{\sim} (x-1)$

b) Soit P un polynôme de degré n, on a alors $P(x) \underset{|x| \to +\infty}{\sim} a_n x^n$

Théorème

1) la relation $f \underset{x_0}{\sim} g$ est une relation d'équivalence au sens algébrique sur l'ensemble des fonctions réelles définies au voisinage de x_0.

2) Si f et g ont la même limite réelle non nulle quand x tend vers x_0, alors $f \underset{x_0}{\sim} g$

Remarque

La condition L réelle non nulle est nécessaire. En effet :

Exemple

1) $f(x) = x$ *et* $g(x) = x^2$, on a $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} x^2$. Pourtant f et g ne sont pas équivalentes au voisinage de 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

2) $f(x)=\frac{1}{x^4}$ et $g(x)=\frac{1}{x^2}$, on a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$. Pourtant f et g ne sont pas équivalentes au voisinage de 0 car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

Théorème

On suppose que L est un élément de $\overline{R}$.

Si $f\underset{x_0}{\sim}g$ et $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=L$.

Règles de calcul :

Si $f\underset{x_0}{\sim}f_1$ et $g\underset{x_0}{\sim}g_1$, alors $fg\underset{x_0}{\sim}f_1g_1$ et $\frac{f}{g}\underset{x_0}{\sim}\frac{f_1}{g_1}$

Si $f\underset{x_0}{\sim}f_1$ et $g\underset{x_0}{\sim}g_1$, on n'a en général

ni $f+g\underset{x_0}{\sim}f_1+g_1$, ni $f-g\underset{x_0}{\sim}f_1-g_1$

Considérons par exemple les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par

$$f_1(x)=x^3\,,\qquad f_2(x)=\frac{x}{1-x}\,,\qquad f_3(x)=\frac{x}{1-x^2}$$

on a $f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)=x^3+\frac{x}{1-x}-\frac{x}{1-x^2}=x^3+\frac{x^2}{1-x^2}$

d'où $f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\underset{0}{\sim}x^2$

alors que $f_1(x)\underset{0}{\sim}x^3$, $f_2(x)\underset{0}{\sim}x$, $f_3(x)\underset{0}{\sim}x$ *et* $x^3+x-x=x^3$

Remarque

$f\underset{x_0}{\sim}g$ signifie que "$\frac{f}{g}$ est voisin de 1", donc $f(x)$ *et* $g(x)$ ont " à peu près la même valeur quand x tend vers x_0". Mais si $f(x)$ *et* $g(x)$ tendent par exemple vers $+\infty$, il ne faut pas croire que $f\underset{x_0}{\sim}g$ implique $\lim\limits_{x_0}(f-g)=0$

On peut tendre vers l'infini avec des vitesses différentes. « x^2 tend plus vite vers l'infini que x ».

Exemple

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\underset{0}{\sim}\frac{1}{x^2} \text{ mais } \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2} \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } x\to 0^+$$

Équivalents simples

$$\sin x\underset{0}{\sim}x$$

$$\tan x\underset{0}{\sim}x$$

$$1-\cos x\underset{0}{\sim}\frac{x^2}{2}$$

$$\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$$

$$\left(e^x-1\right)\underset{0}{\sim}x$$

$$\left((1+x)^\alpha-1\right)\underset{0}{\sim}\alpha x\text{, en particulier, pour } \alpha=\frac{1}{2};\ \left(\sqrt{1+x}-1\right)\underset{0}{\sim}\frac{x}{2}$$

$$\left(1+x\right)\underset{+\infty}{\sim}x$$

Formule de STIRLING

$$n!\underset{+\infty}{\sim}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

Exemple

Equivalent au voisinage de 0 de

$$y=\tan(2x)+\ln(1-2x)+e^{3x}-1$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left(e^{3x}-1\right)\underset{0}{\sim}3x\\ \ln(1-2x)\underset{0}{\sim}(-2x)\end{array}\right\}\Rightarrow \ln(1-2x)+e^{3x}-1\underset{0}{\sim}x\\ \tan(2x)\underset{0}{\sim}2x\end{array}\right\}\Rightarrow y\underset{0}{\sim}3x$$

On fera attention lorsque l'on additionne les équivalents.

Changement de variable

On peut toujours se ramener à un équivalent en 0 en posant $u=x-x_0$ au voisinage de x_0, ou $u=\dfrac{1}{x}$ au voisinage de l'infini.

2.2. Prépondérance et domination

Définition

On dit que $f(x)$ est un infiniment petit quand x tend vers x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

On peut toujours se ramener au cas où x tend vers 0, et on a alors une échelle simple d'équivalents : $x,\ x^2,\ x^3,\ldots,\ x^n,\ldots$

Théorème

Soit $f(x)$ un infiniment petit quand x tend vers 0. Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} ax^n$, avec $a \neq 0$ et n entier non nul, alors a et n sont déterminés de manière unique.

Définition

On dit alors que ax^n est la partie principale de $f(x)$ au voisinage de 0 et que $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre n quand x tend vers x_0

Extension

On dit que $f(x)$ est un infiniment grand quand x tend vers x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

Notation de Landau o et O

Définition

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si et seulement s'il existe une fonction h, définie au voisinage de x_0, telle que

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = g(x)\,h(x) \\ \lim_{x \to x_0} h(x) = 0 \end{cases}$$

on écrit $f \underset{x_0}{=} o(g)$ *ou* $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$ on dira « f est **un petit o** de g ».

Théorème

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0 \end{cases}$$

En particulier: $f = o(1)$ signifie que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Pour alléger la rédaction, lorsque le voisinage est clairement défini, on se contentera d'écrire *f* = o(*g*) ou *f*(*x*) = o(*g*(*x*)).

Exemple

au voisinage de $+\infty$: $x = o(x^2)$

au voisinage de 0 : $x^3 = o(x)$

$\sin^3(x) = o(x)$

$\ln x = \mathrm{o}(\frac{1}{x})$

Propriétés

$f = o(h)$ *et* $g = o(h) \Rightarrow f + g = o(h)$

$f = o(g)$ *et* $g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$

$f = o(h)$ *et* $g = o(k) \Rightarrow fg = o(hk)$

Définition

On dit que *f* est dominée par *g* au voisinage de x_0, si et seulement s'il existe une fonction *h*, définie au voisinage de x_0, telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = g(x)\,h(x) \\ h \text{ est bornée au voisinage de } x_0 \end{cases}$$

Comme pour la notation de o, le voisinage étant clairement défini, **on notera simplement *f* = O(*g*) ou *f*(*x*) = O(*g*(*x*))** on dira « ***f* est un grand O de *g*** »

Remarque

Comme on a supposé $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0, la définition signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de x_0 ou encore qu'il existe un nombre réel M tel que pour tout réel appartenant au voisinage de x_0, on ait $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$.

Si $\left|\frac{f}{g}\right|$ admet une limite alors $f = O(g)$

Propriétés

$f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$
$f \sim g \quad \Rightarrow f = O(g) \quad et \quad g = O(f)$

Exemple

au voisinage de $+\infty$:

$$2x^2 = O(x^2)$$

$$\frac{1}{2}x^2 = O(x^2)$$

$$(\ln x)^{\alpha} = o(x^{\beta}) \quad et \quad x^{\beta} = o(e^{\gamma x}) \text{ où } \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$$

au voisinage de 0 :

$$1 - \cos x = O(x^2)$$

$$x^2 = O(x) \text{ (et aussi } x^2 = o(x))$$

3. Formules de Taylor.

3.1. Formule de Taylor-Lagrange.

Soit $f : [a,b] \to R$, une fonction de classe C^n *sur* $[a,b]$ ayant une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a,b[$, alors il existe un réel c de l'intervalle $]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$$

$$.\qquad ..+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

3.2. Formule de Mac Laurin.

Soit I un intervalle contenant 0, et soit f une fonction réelle (n+1) fois dérivable sur I, alors pour tout x de I, il existe $\theta\in\left]0,1\right[$ tel que

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+.....+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

Exemple

Écrivons la formule de Taylor-Mac Laurin pour la fonction sinus.

$f(x)=\sin x$, on a pour tout $n\geq 1$, $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

Donc $f^{(n)}(0)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ est pair}\\(-1)^p & \text{si } n \text{ est impair } (n=2p+1)\end{cases}$

Si on remplace dans la formule, on obtient :

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+.......+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+(-1)^{p+1}\frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!}\sin(\theta x)$$

$$\text{où } \theta\in\left]0;1\right[$$

Si on veut calculer $\sin(\frac{\pi}{4})$ avec une précision de 10^{-6}, il suffit de choisir p tel que

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+.......+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)\right|\leq\left|(-1)^{p+1}\frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!}\sin(\theta x)\right|$$

L'erreur commise est inférieure à $\frac{1}{(2p+2)!}$, on veut une précision de 10^{-6} soit

$$\left|\frac{1}{(2p+2)!}<10^{-6}\right|\Leftrightarrow(2p+2)!>10^6\Leftrightarrow 2p+2>10\Leftrightarrow p>4$$

en prenant p=4 on trouve $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\approx 0{,}7071067829$ La précision obtenue est bien supérieure à 10^{-6}. En fait, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\approx 0{,}7071067812$.

Exercice (MATH06E03A)

Écrire la formule de Taylor-Mac Laurin pour la fonction cosinus. Donner alors une valeur approchée à 10^{-6} près de $\cos(\frac{7\pi}{3})$. On connaît la valeur exacte de ce cosinus ce qui permet de vérifier l'approximation

3.3. Formule de Taylor-Young.

Soit $f:[a,b]\to R$, une fonction de classe C^n *sur* $[a,b]$ ayant une dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ en x_0 de l'intervalle $]a,b[$, alors :

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots$$
$$+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+\mathrm{o}(x-x_0)^{n+1}$$

au voisinage de x_0.

Exemple

Soit f deux fois dérivable vérifiant :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)\quad \theta\in\,]0;1[,\ \text{où } \theta \text{ dépend de h}$$

Regardons le comportement de θ lorsque h tend vers 0.

On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point x

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\mathrm{o}(h^2) \qquad (2)$$

On applique ensuite à f' la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 au point x.

$$f'(x+k)=f'(x)+kf''(x)+\mathrm{o}(k) \qquad (3)$$

On remplace k par θh dans (3) $\quad f'(x+\theta h)=f'(x)+\theta h\, f''(x)+\mathrm{o}(\theta h)$

et l'on reporte la valeur de $f'(x+\theta h)$ dans l'énoncé

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\theta h^2 f''(x)+\mathrm{o}(\theta h^2)$$

En comparant avec la relation (2), il reste $\theta h^2 f''(x)=\frac{1}{2}h^2 f''(x)+\mathrm{o}(\theta h^2)$

soit $\theta f''(x)=\frac{1}{2}f''(x)+\mathrm{o}(1)$.

Et donc si $f''(x) \neq 0$, alors $\theta = \frac{1}{2} + o(1)$ et $\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{2}$

Si $f''(x) = 0$, il faut supposer *f* trois fois dérivable en *x* et reprendre les développements de Taylor-Young aux ordres respectifs 3 et 2.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + o(h^3) \qquad (2)$$

$$f'(x+k) = f'(x) + \frac{k^2}{2} f'''(x) + o(k^2) \qquad (3)$$

De (3), on déduit $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{\theta^2 h^3}{2} f'''(x) + o(\theta^2 h^3)$

alors pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{\theta^2}{2} f'''(x) = \frac{1}{6} f'''(x) + o(1)$$

Donc si $f'''(x) \neq 0$, $\theta^2 = \frac{1}{3} + o(1)$ et puisque $\theta > 0$, alors $\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarque

La formule de Taylor-Young est d'utilisation locale, (elle interviendra lors de l'étude d'une fonction autour d'un point) alors que la formule de Taylor-Lagrange est utilisable sur un intervalle

4. Développements limités.

4.1. Définitions et premières propriétés.

Soit *I* un intervalle de *R* contenant 0 (ou ayant 0 pour extrémité), un entier naturel *n*, et *f* une fonction définie sur *I*, sauf éventuellement en 0. On dit que *f* admet un développement limité d'ordre *n* au voisinage de 0 si et seulement s'il existe un polynôme P_n de degré $\leq n$, tel que pour tout réel de l'intervalle *I*.

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \text{ quand } x \to 0\text{, ou encore}$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n) \text{ quand } x \to 0$$

$P_n(x)$ est la partie régulière ou polynomiale du développement limité.

$o(x^n)$ est le reste d'ordre n du développement limité (en abrégé DL_n) de f en 0

On peut aussi écrire $o(x^n) = x^n\ \varepsilon(x)$ *avec* $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Généralisation.

Soit un réel x_0, I un intervalle contenant x_0 (ou d'extrémité x_0), et n un entier naturel. f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement s'il existe un polynôme P_n, de degré $\leq n$, tel que :

$$\forall\ x \in I,\ f(x) = P_n(x - x_0) + o(x - x_0)^n \ \text{ quand } \ x \to x_0$$

soit :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n \text{ quand } x \to x_0$$

Remarque

Pour chercher un développement limité de f au voisinage de x_0, on translate la fonction en posant $X = x - x_0$ pour se ramener au voisinage de 0 ; on effectue ensuite tous les calculs sur la fonction translatée, puis on réécrit le résultat à la position initiale x_0.

Théorème

1) Si f admet un DL_n en 0 alors celui-ci est unique

2) Si f admet un DL_n en 0, elle admet un DL_p en 0 pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$

3) f admet un DL_0 en 0 si et seulement si f est continue en 0 pour tout x de I on a

$$f(x) = f(0) + o(1).$$

4) f admet un DL_1 en 0 si et seulement si f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$ et si pour tout x de I, on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x).$$

5) Si f admet un DL_n en 0 de partie régulière P alors

si f est paire alors P est paire,

si f est impaire alors P est impaire

Partie principale

Si f admet un DL_n en 0, et si k est le plus petit entier ($0 \le k \le n$) tel que $a_k \neq 0$, alors $f(x) \underset{0}{\sim} a_k x^k$ et $a_k x^k$ est la partie principale de l'infiniment petit $f\left(x\right)$ quand $x \to 0$.

Remarque

Il se peut qu'une fonction admette un DL_n en 0 $(n \ge 2)$sans être n fois dérivable en 0.

Exemple

$$f : R \to R$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

La fonction f admet un DL_2 en 0 :

$$\forall x \in R,\ f(x) = \mathrm{o}(x^2) \text{ puisque } \lim_{x \to 0}\left(x \sin(\frac{1}{x^2}) \right) = 0$$

La fonction f est dérivable une fois sur R

$$\begin{cases} \forall x \in R^* \quad f'(x) = 3x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} - 2\cos \dfrac{1}{x^2} \\ \qquad f'(0) = 0 \end{cases}$$

Puisque f' n'admet pas de limite en 0, f' n'est pas continue en 0 et f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Théorème

Soit n un entier, f une fonction définie sur I et x_0 un élément de I. Si f est de classe C^n sur I, alors f admet un DL_n en x_0 et :

$$\forall x \in I,\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(x - x_0\right)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + o\left(\left(x - x_0\right)^n\right)$$

En particulier pour $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \mathrm{o}(x^n)$$

Exemple

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Elle vérifie les conditions du théorème précédent. Elle admet donc un développement limité en 0. Calculons les dérivées successives de *f*.

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\ ,\quad f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}\quad ....., \text{ par récurrence } f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Pour tout *n*, on a $f^{(n)}(0)=n!$. En remplaçant dans la formule, on obtient :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+.....+x^n+o(x^n).$$

Exercice (MATH06E04A)

En utilisant la formule de Mac-Laurin, déterminer le développement au voisinage de 0 de la fonction f définie par : $f(x)=\ln(1+x)$

4.2. Table des développements limités au voisinage de 0.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+......+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-.......+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2p+2})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}.......+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2p+1})$$

$$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+.......+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2p+2})$$

$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+.......+\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2p+1})$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

en particulier pour $\alpha=-1$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+.....+(-1)^nx^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$Arc\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - .... + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \mathrm{o}(x^{2p+2})$$

$$Arc\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + .. + \frac{1.3....(2p-1)}{2.4....(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \mathrm{o}(x^{2p+2})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$$Arg\ shx = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + ... + (-1)^p \frac{1.3....(2p-1)}{2.4....(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \mathrm{o}(x^{2p+2})$$

On pourra remarquer que nous ne pouvons donner le développement limité au voisinage de zéro de Argch x défini pour $x \geq 1$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17}{315}x^7 + \mathrm{o}(x^8)$$

$$thx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17}{315}x^7 + \mathrm{o}(x^8)$$

4.3. Opérations sur les développements limités.

On suppose que I est un intervalle ouvert de l'ensemble des réels contenant 0.

On suppose que f et g admettent un DL_n en 0,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n) = A(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n + \mathrm{o}(x^n) = B(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

4.3.1. Addition et multiplication par un réel.

La fonction $\lambda f + g$ admet un DL_n en 0 avec :

$$\begin{cases} d(\lambda A + B) \leq n \\ \forall x \in I,\ (\lambda f + g)(x) = \lambda A(x) + B(x) + o(x^n) \end{cases}$$

Exemple

Démontrons la formule du développement limité de ch x.

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

donc $chx = \frac{1}{2}\left(2 + x^2 + \frac{2x^4}{4!} + ... + \frac{2x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})\right)$

finalement $\quad chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$

4.3.2. Produit.

La fonction *fg* admet un DL_n en 0 dont la partie régulière est obtenue en ne conservant que les termes de degré $\leq n$ dans AB

Exemple

Développement limité de $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1}$ au voisinage de 0 et à l'ordre 4.

$$y = \frac{x^2+1}{(1-x)^2} = (x^2+1)\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

or $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)\right)^2$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4)$$

$$y = (x^2+1)\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (x^2+1)\left(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4)\right)$$

$$y = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + o(x^4)$$

Exercice **(MATH06E05A)**

Développement limité au voisinage de $x_0 = 0$ à l'ordre $n = 5$ de la fonction $f(x) = \dfrac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$

En déduire les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$ et $f^{(5)}(0)$.

4.3.3. Inverse.

Si $g(0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ admet un DL_n en 0 dont la partie régulière est le quotient à l'ordre $n - 1$ dans la division suivant les puissances croissantes de la partie régulière du développement limité de f par la partie régulière du développement limité de g.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent

Développement limité de $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1}$ au voisinage de 0 et à l'ordre 4.

En effectuant la division suivant les puissances croissantes du numérateur par le dénominateur, on obtient plus facilement le résultat.

4.3.4. Composition.

On suppose f définie sur un intervalle I de l'ensemble des réels contenant 0 et g définie sur un intervalle J de l'ensemble des réels contenant 0 avec $f(0) = 0$ alors la fonction $g \circ f$ admet un DL_n en 0 . La partie régulière s'obtient en substituant la partie régulière du développement limité de f dans la partie régulière du développement limité de g et en ne conservant que les termes de degré au plus égal à n.

Exemple

$y = \ln(\cos\, x)$ au voisinage de 0 et à l'ordre 4.

$y = \ln(\cos\, x - 1 + 1) = \ln(u+1)$ avec $u = \cos\, x - 1$, $\lim\limits_{x \to 0} u = 0$

$\ln(u+1) = u - \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ et $u = \cos\, x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

$$y = \ln(u+1) = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right]^2 + o(x^4)$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

d'où finalement : $y = \ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$.

Exercice **(MATH06E06A)**

Développement limité à l'ordre 4 de la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}$.

4.3.5. Dérivation.

Si *f* admet un DL_n (0) et si *f* ' admet un DL_{n-1} (0) alors la partie régulière du développement de *f* ' s'obtient en dérivant terme à terme la partie régulière du DL_n de *f* en 0

Si $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \mathrm{o}(x^n)$

alors

$$f'(x) = f'(0) + xf''(0) + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \mathrm{o}(x^{n-1})$$

Exemple

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+2}\right)$$

$$\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p+1}\right)$$

4.3.6. Intégration.

Si *f* admet un DL_n (0) sur *I* alors $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ admet DL_{n+1}.(0) La partie régulière du DL_{n+1}.(0) s'obtient en intégrant terme à terme la partie régulière du DL_n (0) de *f*.

Si $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \mathrm{o}(x^n)$

alors

$$\int_0^x f(t)\,dt = xf(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \frac{x^3}{3!} f''(0) + ... + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + o(x^{n+1})$$

Pour une primitive G quelconque de f, il apparaît une constante égale à $G(0)$.

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

$$F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right) + F(0)$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \Big[\ln|1+t|\Big]_0^x = \ln(1+x) \quad \text{au voisinage de } 0$$

donc $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right)$

Exercice **(MATH06E07A)**

Ecrire le développement limité à l'ordre 4 en zéro de

$$f : x \mapsto Arc\tan \frac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}$$

5. Généralisation des développements limités.

5.1. Développement limité à l'ordre n en 0 à gauche, à droite.

On peut considérer une fonction définie sur un intervalle ouvert dont une extrémité est 0 (au lieu d'un intervalle ouvert contenant 0). On peut ainsi former un DL_n en 0 à droite ou un DL_n en 0 à gauche. Si f admet un DL_n en 0, f admet un DL_n à droite en 0 et un DL_n à gauche en 0 et ces développements sont égaux mais une fonction peut admettre un DL_n à droite et un DL_n à gauche sans pour autant admettre de DL_n en 0.

5.2. Développement limité au voisinage de l'infini.

Une fonction *f* définie dans un intervalle $I = \left]a, +\infty\right[$ admet un DL_n au voisinage de $+\infty$ si la fonction $h : u \mapsto f(\frac{1}{u})$ admet un DL d'ordre *n* à droite de 0

$$h(u) = a_0 + a_1 u + ... + a_n u^n + o(u^n)$$

ce qui donne pour *f* : $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$

On définit de même le développement limité d'ordre *n* au voisinage de moins l'infini.

Exemple

Développement limité à l'ordre 2 en plus l'infini de la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

On pose $u = \frac{1}{x}$ soit $x = \frac{1}{u}$

on obtient $g(u) = \sqrt{\frac{1}{1-u}} = (1-u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o(u^2)$

Finalement $f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Exercice **(MATH06E08A)**

Trouver le développement limité généralisé au voisinage $+\infty$ à l'ordre *n* = 3, l'infiniment petit principal étant $\frac{1}{x}$ de $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x}$.

5.3. Développement limité généralisé au voisinage de 0.

Si *f* n'admet pas de développement limité au voisinage de 0, il peut exister un équivalent *g*(*x*) tel que $\frac{f}{g}$ admette un développement limité au voisinage de 0.

En particulier si

$f(x) = x^{\alpha}(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n))$ avec α entier strictement négatif, on dit que *f* admet un développement limité généralisé au voisinage de 0.

6. Application des Développements limités.

6.1. Calcul de limites.

Au voisinage de x_0, le premier terme non nul du développement limité (ou du développement limité généralisé) de f fournit un équivalent de $f(x)$, ce qui peut permettre de trouver la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0

Rappel $f(x) = \left[u(x)\right]^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ avec $u(x) > 0$

Exemple

On va chercher la limite en 0 si elle existe de la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\sin x\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+x+o(x)\right)} = e^{\frac{1}{x}\left(x+o(x)\right)} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = e$$

Exercice **(MATH06E09A)**

Calculer la limite en $\frac{\pi}{4}$ si elle existe de la fonction f définie par $f(x) = \left(\tan x\right)^{\frac{1}{\cos(2x)}}$.

6.2. Etude de la courbe au voisinage d'un point.

Soit M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ sur la courbe représentative (C) de f. Le développement limité ou le développement limité généralisé de f permet de préciser la forme de (C) au voisinage de M_0**.** Si la fonction f est dérivable en x_0, la courbe (C) admet au point M_0 une tangente d'équation réduite :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0)$$

Supposons que f admette au voisinage de x_0 un développement de Taylor et soit $f^{(k)}$ la première dérivée d'ordre $k \geq 2$ non nulle pour $x = x_0$. On a alors

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \mathrm{o}\left[(x - x_0)^k\right]$$

La mesure algébrique de l'écart entre la tangente (M_0T) et la courbe vaut

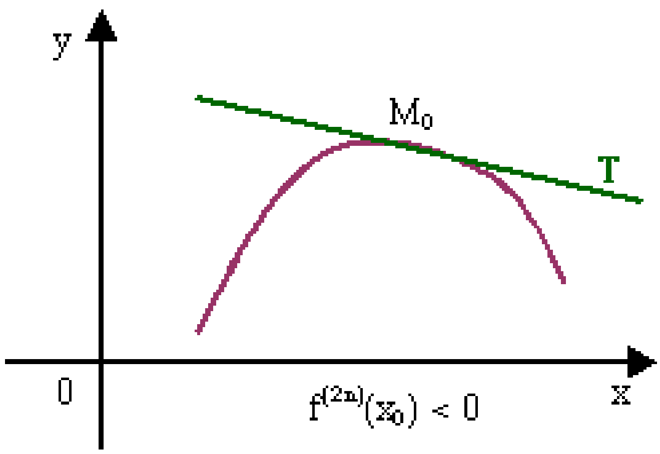
$$\overline{PM} = f(x) - \left[f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)\right] = \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \mathrm{o}\left[(x - x_0)^k\right]$$

On a donc quand x tend vers x_0

$$\overline{PM} \sim \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

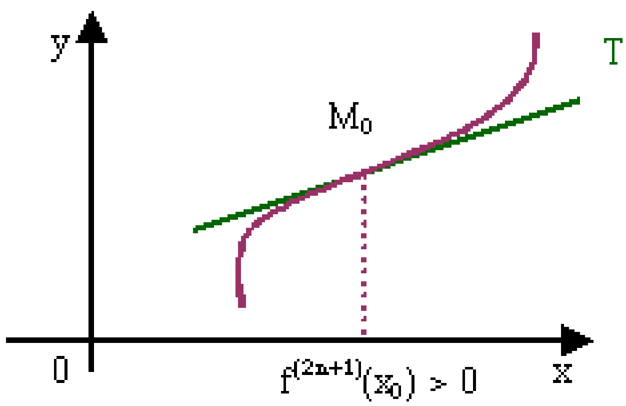
Si k est pair

$\overline{PM}$ garde un signe constant au voisinage de M_0 et la courbe reste du même côté de la tangente. On dit qu'on a un point ordinaire.



Si k est impair

$\overline{PM}$ change de signe pour $x = x_0$, la courbe traverse la tangente au point M_0. On a un point d'inflexion.



Ce qui précède reste valable en supposant seulement que f admet au voisinage de x_0 un développement limité :

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + \mathrm{o}\left[(x - x_0)^k\right]$$

f est alors dérivable en x_0. Il existe donc une tangente et pour trouver la position de la courbe, on remplace dans les raisonnements précédents $f^{(k)}(x_0)$ par $k!\, a_k$

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

Déterminons l'asymptote oblique et la position de la courbe par rapport à celle-ci.

$$\begin{aligned} f(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) &= x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 1\right) \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

La droite d'équation réduite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe en plus l'infini et moins l'infini. La courbe est située en dessous de la droite asymptote au voisinage de moins l'infini et au-dessus au voisinage de plus l'infini.

Exercice **(MATH06E10A)**

A l'aide d'un développement limité, donner l'équation de l'asymptote à la courbe représentative de la fonction f définie par $\sqrt[3]{x^2(x-3)}$.

Exercices d'entraînement (avec réponses)

Exercice (MATH06E11)

Effectuer le développement limité d'ordre 5 au voisinage de zéro de

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(Arc\sin x)^2}$$

Exercice (MATH06E12)

Calculer si elle existe la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}-\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/2}\right)$

Exercice (MATH06E13)

Déterminer la partie principale au voisinage de zéro de $f(x)=\tan\left[\ln(1+x)\right]-\ln(1+\tan x)$.

Exercice (MATH06E14)

Développement limité au voisinage de zéro à l'ordre 4 de la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{sh^2 x}$$

Exercice (MATH06E15)

On considère la fonction f définie sur $\left]-\pi,0\right[\cup\left]0,\pi\right[$ par $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$.

Démontrer que f admet un développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0. En déduire que f admet un prolongement continu et dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.
Montrer que f est de classe C^1 sur $\left]-\pi,\pi\right[$.

Exercice (MATH06E16)

Développement limité au voisinage de $x_0=\frac{\pi}{4}$ à l'ordre $n=3$ de la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{\tan x}$.

Exercices supplémentaires à faire en liaison pédagogique avec le tuteur.

Exercice (MATH06E17)

Calculer, si elle existe, la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x} \right) \right)^x$

Exercice (MATH06E18)

Effectuer le développement limité généralisé au voisinage de zéro à l'ordre 2 de

$$f(x) = \frac{\cos x}{\ln(1+x)}$$

Solution **(MATH06E11)**

$$f(x)=\frac{(Arc\sin x)^2-x^2}{x^2(Arc\sin x)^2}$$

$$Arc\sin x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5}{112}x^7+\mathrm{o}(x^8)$$

On sait que $Arc\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $x^2(Arc\sin x)^2 \underset{0}{\sim} x^4$.

On sera amené à simplifier par x^4, il faut donc développer le numérateur et le dénominateur à l'ordre n=9 pour obtenir un développement limité de $f(x)$ à l'ordre n=5 au voisinage de 0.

La fonction $\varphi: x \mapsto (Arc\sin x)^2$ est paire, et la partie régulière de son développement limité à l'ordre n est paire (les coefficients des termes de degré impairs sont nuls) donc les parties régulières à l'ordre $2n$ et $2n$+1 sont égales.

$$(Arc\sin x)^2 = x^2+\frac{x^4}{3}+\frac{8}{45}x^6+\frac{4}{35}x^8+\mathrm{o}(x^9)$$

$$(Arc\sin x)^2-x^2 = x^4\left[\frac{1}{3}+\frac{8}{45}x^2+\frac{4}{35}x^4+\mathrm{o}(x^5)\right]$$

$$f(x)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{8}{45}x^2+\frac{4}{35}x^4+\mathrm{o}(x^5)}{1+\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{45}x^4+\mathrm{o}(x^5)}$$

En divisant le numérateur par le dénominateur suivant les puissances croissantes on obtient :

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}x^2+\frac{31}{945}x^4+\mathrm{o}(x^5)$$

Retour

Solution (MATH06E12)

Nous avons affaire à une forme indéterminée.

Afin d'utiliser les développements limités valables au voisinage de l'origine, posons

$x=\frac{1}{h}$ ou $h=\frac{1}{x}$, on a $h\to 0$ quand $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}-\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left((1+\frac{h}{2})^{\frac{3}{h}}-(1+3h)^{\frac{1}{2h}}\right)$$

$u^v=e^{v\ln u}$ avec $u>0$

$$(1+\frac{h}{2})^{\frac{3}{h}}=e^{\frac{3}{h}\ln(1+\frac{h}{2})}=e^{\frac{3}{h}\left[\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+o(h^2)\right]}=e^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3h}{8}+o(h)}$$

$$(1+3h)^{\frac{1}{2h}}=e^{\frac{1}{2h}\ln(1+3h)}=e^{\frac{1}{2h}\left[3h-\frac{9h^2}{2}+o(h^2)\right]}=e^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{9h}{4}+o(h)}$$

Finalement :

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{3}{2}}(e^{-\frac{3h}{8}}-e^{-\frac{9h}{4}})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{3}{2}}\left[(1-\frac{3h}{8}+o(h))-(1-\frac{9h}{4}+o(h))\right]}{h}=\frac{15}{8}e^{\frac{3}{2}}$$

Retour

Solution (MATH06E13)

Il faut effectuer le développement limité jusqu'à l'ordre n=4

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\tan\left[\ln(1+x)\right] = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}) + \frac{1}{3}(x^3 - \frac{3x^4}{2}) + o(x^4)$$

$$\ln(1+\tan x) = \ln(1 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)) = (x + \frac{x^3}{3}) - \frac{1}{2}(x + \frac{x^3}{3})^2 + \frac{1}{3}(x + \frac{x^3}{3})^3 - \frac{1}{4}(x + \frac{x^3}{3})^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

La partie principale de $f(x)$ est $-\frac{1}{6}x^4$

Retour

Solution **(MATH06E14)**

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{sh^2x}=\frac{(shx+\sin x)(shx-\sin x)}{(\sin x\ shx)^2}$$

Le dénominateur est un infiniment petit d'ordre 4 par rapport à l'infiniment petit principal *x*. Il faut donc effectuer le développement limité du numérateur à l'ordre 8 pour obtenir un résultat final à l'ordre 4.

$$shx=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{5040}x^7+o(x^8)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^8)$$

$$shx+\sin x=2x+\frac{1}{60}x^5+o(x^8)$$

$$shx-\sin x=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2520}x^7+o(x^8)$$

$$sh^2x-\sin^2 x=x^4(\frac{2}{3}+\frac{2}{315}x^4+o(x^5))$$

$$shx\ \sin x=x^2-\frac{1}{90}x^6+o(x^7)$$

$$(shx\ \sin x)^2=x^4(1-\frac{1}{45}x^4+o(x^5))$$

soit, par exemple par division

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{sh^2x}=\frac{2}{3}+\frac{4}{189}x^4+o(x^5)$$

Retour

Solution (MATH06E15)

Sur $\left]-\pi,0\right[\cup\left]0,\pi\right[$ le dénominateur ne s'annule pas et la fonction est de classe C^{∞} et donc f admet un développement limité à tout ordre fourni par la formule de Taylor, donc en particulier f admet un $DL_4(0)$

$$f(x)=\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\frac{-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}(x^6)}{x(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}(x^5))}=\frac{-\frac{x}{6}+\frac{x^3}{120}+\mathrm{o}(x^4)}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}(x^4)}$$

$$f(x)=-\frac{x}{6}-\frac{7x^3}{360}+\mathrm{o}(x^4)$$

On déduit du développement limité précédent :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$; on peut prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0)=0$

et $a_1 = f'(0)=-\frac{1}{6}$

Sur $\left]-\pi,0\right[\cup\left]0,\pi\right[$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x + x^2\cos x}{x^2\sin^2 x}$

Le dénominateur est un infiniment petit d'ordre 4, le numérateur s'écrit :

$$-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)\right)^2+x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)=-x^2+\frac{x^4}{3}+x^2-\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)=-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=-\frac{1}{6}=f'(0)$ alors la dérivée f' est continue en $x_0=0$

et la fonction f est de classe C^1 *sur* $\left]-\pi,\pi\right[$.

Retour

Solution (MATH06E16)

Pour utiliser les développements limités valables au voisinage de l'origine, posons

$$x-\frac{\pi}{4}=h \quad \text{ou} \quad x=\frac{\pi}{4}+h$$

$$f(\frac{\pi}{4}+h)=\sqrt{\tan(\frac{\pi}{4}+h)}=\sqrt{\frac{1+\tan h}{1-\tan h}}$$

$$\tan h=h+\frac{1}{3}h^3+o(h^3) \text{ et } \frac{1+\tan h}{1-\tan h}=\frac{1+h+\frac{1}{3}h^3+o(h^3)}{1-h-\frac{1}{3}h^3+o(h^3)}$$

En effectuant par exemple, la division suivant les puissances croissantes de h

$$\frac{1+\tan h}{1-\tan h}=1+2h+2h^2+\frac{8}{3}h^3+o(h^3)$$

$$f(\frac{\pi}{4}+h)=\left[1+(2h+2h^2+\frac{8}{3}h^3+o(h^3)\right]^{1/2}$$

posons $u=2h+2h^2+\frac{8}{3}h^3$ *et* $u\to 0$ *lorsque* $h\to 0$

u est un infiniment d'ordre 1 par rapport à l'infiniment petit principal h

$$(1+u)^{1/2}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+o(u^3)$$

$$f(\frac{\pi}{4}+h)=1+\frac{1}{2}\left[2h+2h^2+\frac{8}{3}h^3\right]-\frac{1}{8}\left[2h+2h^2\right]^2+\frac{1}{16}\left[2h\right]^3+o(h^3)$$

$$f(\frac{\pi}{4}+h)=1+h+\frac{1}{2}h^2+\frac{5}{6}h^3+o(h^3)$$

et en revenant à la variable x

$$f(x)=\sqrt{\tan x}=1+(x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{5}{6}(x-\frac{\pi}{4})^3+o\left[(x-\frac{\pi}{4})^3\right]$$

le point $M_0(\frac{\pi}{4},1)$ est un point ordinaire.

L'équation réduite de la tangente (M_0T) *en* M_0 *à la courbe est* $y_T=1+(x-\frac{\pi}{4})$

$$f(\frac{\pi}{4})=1 \quad , \quad f'(\frac{\pi}{4})=1 \quad , \quad f''(\frac{\pi}{4})=1 \quad , \quad f'''(\frac{\pi}{4})=5$$

Retour

Solution (MATH06E17)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)^x\right)$$

Forme indéterminée, on sait que : $u^v = e^{\ln u}$ pour $u > 0$

Pour pouvoir utiliser les développements limités, puisque $x \to +\infty$, on pose $x = \frac{1}{h}$

et $h \to 0$ lorsque $x \to +\infty$

On a $\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)\right)^x = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{h}\ln\left(\frac{1+\tan h}{1-\tanh}\right)}$

Et on cherche : $\lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}\ln\frac{1+\tan h}{1-\tan h}}$

$$\ln\frac{1+\tan h}{1-\tan h} = \ln(1+\tanh) - \ln(1-\tanh)$$

Au voisinage de 0 :

$\tanh \sim h$ et $\ln(1+h) \sim h$ donc $\ln(1+\tanh) \sim h$ et $\ln(1-\tanh) \sim -h$

donc

$\ln\left(\frac{1+\tan h}{1-\tanh}\right)$ équivalent à $2h$

et finalement $\lim_{x\to+\infty}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)\right)^x = e^2$.

Retour

Solution (MATH06E18)

$$f(x)=\frac{\cos x}{\ln(1+x)}=\frac{1}{x}\left(\frac{1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\mathrm{o}(x^3)}\right)$$

posons $u=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{4}$ et $u\to 0$ lorsque $x\to 0$

u est un infiniment petit d'ordre 1 par rapport à l'infiniment petit principal x

et $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+o\left(u^3\right)$

donc

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o\left(x^3\right)}=1-\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2-\left(-\frac{x}{2}\right)^3+o\left(x^3\right)$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{24}+o\left(x^4\right)$$

finalement :

$$f(x)=\frac{1}{x}.\left[1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)\right]\left[1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{24}+\mathrm{o}(x^3)\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{7x}{12}-\frac{5x^2}{24}+\mathrm{o}(x^2)$$

Retour

Solution (MATH06E01A)

Envisageons $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$

f est une fonction polynôme

f est continue sur $\left[0,1\right]$ et f est dérivable sur $\left]0,1\right[$

$f(0) = 0$ *et* $f(1) = 0$

D'aprés le théorème de Rolle, il existe au moins une valeur $c \in \left]0,1\right[$

telle que $f'(c) = 0$

or $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c)$

donc l'équation proposée admet au moins une solution c dans l'intervalle $\left]0,1\right[$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E02A)

Soit n un entier naturel. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f : x \mapsto \ln x$ *sur* $\left[p, p+1\right]$ où p est un entier quelconque compris entre 1 et n.

Il existe c_p de l'intervalle $\left]p, p+1\right[$ tel que $\ln(p+1) - \ln p = \dfrac{1}{c_p}$

Les nombres étant strictement positifs, on a $p < c_p < p+1 \Rightarrow \dfrac{1}{p+1} < \dfrac{1}{c_p} < \dfrac{1}{p}$.

donc $\ln(p+1) - \ln p \leq \dfrac{1}{p}$

En faisant la somme des inégalités précédentes pour variant de 1 à n, on obtient

$$\sum_{p=1}^{n} \left[\ln(p+1) - \ln p\right] = \ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

et lorsque $n \to +\infty$, $\ln n \to +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p} = +\infty$

(La série diverge vers l'infini)

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH06E02B)

$f(x)=\frac{1}{x}$ et $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

La formule des accroissements finis s'écrit :

$$\frac{1}{a+h}=\frac{1}{a}-\frac{h}{(a+\theta h)^2} \quad \text{avec} \quad 0<\theta<1$$

$$\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}=-\frac{h}{a(a+h)}=-\frac{h}{(a+\theta h)^2}$$

et puisque $h>0$ alors $(a+\theta h)^2=a(a+h)$ et puisque les deux quantités sont positives

$$a+\theta h=\sqrt{a^2+ah}$$

il existe une valeur et une seule de θ pour la fonction $x\mapsto f(x)=\frac{1}{x}$ soit $\theta=\frac{-a+\sqrt{a^2+ah}}{h}$

Remarquons que θ s'écrit aussi $\theta=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ et donc $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH06E02C)

La fonction $x \mapsto f(x) = Arc\sin x$ est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$,

de plus $Arc\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\forall x \in [0,5;0,6] = \left[\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right]$, on a :

$$\frac{1}{4} \leq x^2 \leq \frac{9}{25} \Leftrightarrow -\frac{9}{25} \leq -x^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{16}{25} \leq 1-x^2 \leq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{16}{25}} \leq \sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{5}{4}$$

D'après la formule des accroissements finis :

$$\frac{1}{10}\frac{2}{\sqrt{3}} < Arc\sin 0,6 - Arc\sin 0,5 < \frac{1}{10}\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{15} < Arc\sin 0,6 - \frac{\pi}{6} < \frac{1}{8}$$

soit $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < Arc\sin 0,6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E03A)

$f(x) = \cos x$. On a pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Donc $f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^p & \text{si } n \text{ est pair } (n = 2p) \end{cases}$

Si on remplace dans la formule on obtient :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \sin(\theta x) \quad \text{où} \quad \theta \in \left]0;1\right[$$

$$\left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}\right)\right| \leq \left|(-1)^{p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \sin(\theta x)\right|$$

Remarquons que $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}$

Pour que $\left|(-1)^{p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \sin(\theta x)\right| \leq 10^{-6}$

Il suffit que $\dfrac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2p+1}}{(2p+1)!} \leq 10^{-6}$

Comme $\frac{\pi}{3} \leq 1{,}1$; il suffit que $\dfrac{1{,}1^{2p+1}}{(2p+1)!} \leq 10^{-6}$

On essaye p=2, puis p=3 jusqu'à p=5 qui est le premier p qui convienne.

On trouve alors :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) \approx 1 - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \frac{1}{4!} - \left(\frac{\pi}{3}\right)^6 \frac{1}{6!} + \left(\frac{\pi}{3}\right)^8 \frac{1}{8!} - \left(\frac{\pi}{3}\right)^{10} \frac{1}{10!} \approx 0{,}4999999964$$

L'erreur commise est inférieure à 10^{-6}.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E04A)

La fonction est indéfiniment dérivable au voisinage de 0. On calcule les dérivées successives de *f*.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x} \qquad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \qquad \text{.....par récurrence}$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\forall n\geq 1,\ \text{ on a } \ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \qquad \text{donc}$$

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+(-1)^{3-1}(3-1)!\frac{x^3}{3!}+.........+(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\text{finalement } \ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+.........+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH06E04B)

La fonction est indéfiniment dérivable au voisinage de 0.

On calcule les dérivées successives de *f*

$f^{(n)}(x) = e^x$

$\forall n \geq 1,$ on a $f^{(n)}(0) = 1$

Donc $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E05A)

f est de classe C^{∞} sur $\left]-1\,;1\right[$, donc f admet en tout point de cet ouvert un développement limité à tout ordre fourni par la formule de Taylor-Young, en particulier f admet un $DL_5(0)$.

$f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = Arc\sin x(1-x^2)^{-1/2}$

On multiplie :

$$Arc\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \mathrm{o}(x^6)$$

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$$

$$\begin{array}{lll} x & +\frac{1}{6}x^3 & +\frac{3}{40}x^5 \\ & +\frac{1}{2}x^3 & +\frac{1}{12}x^5 \\ & & +\frac{3}{8}x^5 + \mathrm{o}(x^6) \end{array}$$

$$f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^6) = x + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{64}{5!}x^5 + o(x^6)$$

Puisque f est de classe C^{∞} sur $\left]-1\,;1\right[$, f admet un $DL_n(0)$ avec

$$a_k = \frac{f^{(k)}0)}{k!} \quad \forall k \in \{0,1,\dots\dots,n\}$$

$$f(0)=0\ ,\quad f'(0)=1\ ,\quad f''(0)=0\ ,\quad f'''(0)=4\ ,\quad f^{(4)}(0)=0 \ \ et\ \ f^{(5)}(0)=64$$

La courbe représentative de f admet en $M_0(0,0)$ une tangente d'équation réduite $y = x$

La courbe est au-dessus de la tangente si $x > 0$

au-dessous de la tangente si $x < 0$

Le point $M_0(0,0)$ est un point d'inflexion.

On peut aussi remarquer que $f(x) = \dfrac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\left[(Arc\sin x)^2\right]\right)$.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E06A)

Par suite de la simplification par x^2, il faut développer le numérateur et le dénominateur à l'ordre $n = 6$ pour obtenir un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o\left(x^6\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o\left(x^6\right)$$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o\left(x^6\right)$$

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{\ln(\cos x)} = \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o\left(x^4\right)\right)}{x^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{45} + o\left(x^4\right)\right)} = -2 + x^2 - \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH06E06B)

Puisque $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$, la fonction *f* existe et est indéfiniment dérivable au voisinage de 0.

f admet en particulier un $DL_3(0)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

En utilisant une composition de développement limité

Posons $u = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ et $u \to 0$ quand $x \to 0$

u est un infiniment petit d'ordre 1 par rapport à l'infiniment petit principal *x*

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \mathrm{o}(u^3)$$

En ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 3

$$f(x) = \left[-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right] + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{8}x^3\right] + \mathrm{o}(x^3)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{24}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

On en déduit $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$; on peut prolonger *f* par continuité en 0, en posant *f*(0) = 0. La courbe représentative de *f* admet en $M_0(0,0)$ une tangente d'équation réduite : $y = -\frac{1}{2}x$. La courbe est toujours au-dessus de sa tangente. Le point $M_0(0,0)$ est un point ordinaire.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice

Retour

Solution (MATH06E06C)

$x \mapsto f(x) = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$ est de classe C^∞ au voisinage de 0

La quantité $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$ tend vers 2 quand x tend vers 0, il faut donc commencer par mettre 2 en facteur ;

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2(1 - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^3))$$

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = (\ln 2)(1 - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^3))$$

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = \ln 2 + \ln(1 - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^3))$$

$\ln(1+u) = u + \mathrm{o}(u)$ avec $u = -\frac{x^2}{8} \to 0$ quand $x \to 0$

u est infiniment petit d'ordre 2 par rapport à l'infiniment petit principal x

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = \ln 2 - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^3)$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E07A)

$x \mapsto f(x) = Arc\tan \dfrac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}$ est de classe C^{∞} au voisinage de 0

On effectue $DL_3(0)$ de $f'(x)$ au voisinage de 0 et on intègre

$$f'(x) = -\frac{2}{(1+x\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}+x)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x\sqrt{3}+x^2}\right)$$

On pose $u = x\sqrt{3}+x^2$ et u est un infiniment petit d'ordre 1 par rapport à l'infiniment petit principal x.

$$\frac{1}{1+u} = 1-u+u^2-u^3+\mathrm{o}(u^3)$$

$$\frac{1}{1+x\sqrt{3}+x^2} = 1-(x\sqrt{3}+x^2)+(x\sqrt{3}+x^2)^2-(x\sqrt{3}+x^2)^3+\mathrm{o}(x^3)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x\sqrt{3}+2x^2-x^3\sqrt{3})+\mathrm{o}(x^3)$$

$$f(x) = \text{constante} - \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{\sqrt{3}x^4}{8} + \mathrm{o}(x^4)$$

puisque $f(0) = Arc\tan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \text{constante} = \dfrac{\pi}{3}$

$$f(x) = \frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{\sqrt{3}x^4}{8} + \mathrm{o}(x^4)$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E08A)

On pose $h=\dfrac{1}{x}$ ou $x=\dfrac{1}{h}$ et ainsi $h\to 0$ lorsque $x\to+\infty$

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x}$$

$$f(h)=\sqrt[3]{\frac{1}{h^3}+1}-\sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}}$$

$$f(\frac{1}{h})=\frac{1}{h}\sqrt[3]{1+h^3}-\frac{1}{h}\sqrt{1+h}=\frac{1}{h}\left(\sqrt[3]{1+h^3}-\sqrt{1+h}\right)$$

Pour tenir compte du facteur en $\dfrac{1}{h}$ devant la parenthèse, on doit développer cette parenthèse à l'ordre 4 en h

$$\sqrt[3]{1+h^3}=1+\frac{1}{3}h^3+\mathrm{o}(h^4)$$

$$\sqrt{1+h}=1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+\frac{1}{16}h^3-\frac{5}{128}h^4+\mathrm{o}(h^4)$$

$$f(\frac{1}{h})=-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}h+\frac{13}{48}h^2+\frac{5}{128}h^3+\mathrm{o}(h^3)$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{8x}+\frac{13}{48x^2}+\frac{5}{128x^3}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^3})$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice

Retour

Solution (MATH06E08B)

Lorsque $x \to +\infty$ et $\sqrt{x^2} = x$

$$f(x) = x^2\left[(1+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4})^{\frac{1}{2}}\right] - x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$f(x) = x^2\left[1+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{2x^4}+o(\frac{1}{x^4})\right] - x^2\left[1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+o(\frac{1}{x^4})\right]$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{13}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$

La représentation graphique admet comme asymptote la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$

lorsque $x \to +\infty$ alors $\frac{1}{x} \to 0^+$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

Lorsque x $\to -\infty$

$$f(x) = x^2\left[(1+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4})^{\frac{1}{2}}\right] + x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$f(x) = x^2\left[1+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{2x^4}+o(\frac{1}{x^4})\right] + x^2\left[1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+o(\frac{1}{x^4})\right]$$

$$f(x) = 2x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{11}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$

La représentation graphique de f admet comme courbe asymptote la parabole d'équation : $y = 2x^2+\frac{1}{2}$.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E09A)

Utilisons la transformation "logarithme-exponentielle" $u^v = e^{v\ln u}$ avec $u > 0$

$$f(x) = e^{\frac{1}{\cos(2x)}\ln(\tan x)}$$

Afin d'utiliser les développements limités connus au voisinage de l'origine, posons

$x - \dfrac{\pi}{4} = h$ ou $x = \dfrac{\pi}{4} + h$ ainsi lorsque $x \to \dfrac{\pi}{4}$ alors $h \to 0$

$$f(h + \frac{\pi}{4}) = e^{\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+2h)}\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)} = e^{-\frac{1}{\sin(2h)}\ln\left(\frac{1+\tan h}{1-\tan h}\right)} = e^{-\frac{1}{\sin(2h)}\ln(1+\tan h)-\ln(1-\tan h)}$$

$$\tan(h) = h + \mathrm{o}(h)$$

$$\ln(1+\tan(h)) = \ln(1+h+\mathrm{o}(h)) = h + \mathrm{o}(h)$$

et

$$\ln(1-\tan(h)) = \ln(1-h+\mathrm{o}(h)) = -h + \mathrm{o}(h)$$

$$\ln(1+\tan(h)) - \ln(1-\tan(h)) = 2h + \mathrm{o}(h)$$

$$\sin 2h = 2h + \mathrm{o}(h)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{1}{\cos(2x)}\ln(\tan x)} = \lim_{h\to 0} e^{-\frac{1}{2h+o(h)}(2h+o(h))} = e^{-1}$$

On peut ici alléger la rédaction avec les équivalents.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH06E09B)

Afin d'utiliser les développements limités au voisinage de l'origine, posons

$$x=\frac{1}{h} \quad \text{ou} \quad h=\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h\to 0 \quad \text{quand} \quad x\to +\infty$$

$$f(x)=\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)^{x^2}=\left(2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{x^2}$$

$$f(h)=\left(2(1+h)^{\frac{1}{2}}-(1+2h)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{h^2}}=e^{\frac{1}{h^2}\ln\left(2(1+h)^{\frac{1}{2}}-(1+2h)^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+o(u^2)$$

$$2(1+h)^{\frac{1}{2}}=2+h-\frac{1}{4}h^2+o(h^2)$$

$$(1+2h)^{\frac{1}{2}}=1+h-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)$$

$$f(h)=e^{\frac{1}{h^2}\ln\left(2(1+h)^{\frac{1}{2}}-(1+2h)^{\frac{1}{2}}\right)}=e^{\frac{1}{h^2}\ln\left(1+\frac{1}{4}h^2+o(h^2)\right)}$$

$$\ln(1+\frac{1}{4}h^2+o(h^2))=\frac{1}{4}h^2+o(h^2)$$

$$f(h)=e^{\frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{4}h^2+o(h^2)\right)}=e^{\frac{1}{4}+o(1)}$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} f(h)=e^{\frac{1}{4}}=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH06E09C)

Le dénominateur x^4 indique qu'il faut effectuer un développement limité du numérateur à l'ordre $n = 4$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

$$chx = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

donc

$$\ln(chx) = \ln\left[1 + (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) + o(x^5)\right]$$

posons $u = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ et $u \to 0$ lorsque $x \to 0$

u est un infiniment petit d'ordre 2 par rapport à l'infiniment petit principal x

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$$

$$\ln(chx) = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2)^2 + o(x^5) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)$$

$$1 - \cos x - \ln(chx) = \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x - \ln(chx)}{x^4} = \frac{1}{24}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E10A)

L'ensemble de définition de la fonction est $D_f = R$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-3)} = \sqrt[3]{x^3(1-\frac{3}{x})} = x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}$$

On pose $h = \frac{1}{x}$ ou $x = \frac{1}{h}$ et ainsi $h \to 0$ lorsque $|x| \to +\infty$.

Posons $u = -3h$;

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2)$$

$$f(\frac{1}{h}) = \frac{1}{h}(1 - h - h^2 + o(h^2))$$

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$$

La représentation graphique admet comme asymptote la droite d'équation réduite $y = x - 1$

Lorsque $x \to +\infty$ alors $-\frac{1}{x} \to 0^-$ et la courbe est au-dessous de l'asymptote.

Lorsque $x \to -\infty$ alors $-\frac{1}{x} \to 0^+$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH06E10B)

$$f(x)=\sqrt{x^4(1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4})}+(x+2)\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}$$

Lorsque $x\to+\infty$, $f(x)=x^2(1+(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}))^{\frac{1}{2}}+x(x+2)(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}$

En se limitant à la précision $\frac{1}{x}$,

$$f(x)=x^2(1+\frac{1}{2}(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^3})))+x(x+2)(1+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^2}))$$

$$f(x)=2x^2+2x+\frac{3}{2}+\frac{5}{2x}+\mathrm{o}(\frac{1}{x})$$

La représentation graphique admet la parabole asymptote d'équation réduite $y=2x^2+2x+\frac{3}{2}$

lorsque $x\to+\infty$ alors $\frac{5}{2x}\to 0^+$ et la courbe est au-dessus de la parabole asymptote.

Lorsque $x\to-\infty$, $\sqrt{x^2}=-x$ si $x<0$

$$f(x)=x^2(1+(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}))^{\frac{1}{2}}-x(x+2)(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=-2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}+\mathrm{o}(\frac{1}{x})$$

La représentation graphique admet comme asymptote la droite d'équation réduite

$y=-2x+\frac{1}{2}$

lorsque $x\to-\infty$ alors $\frac{1}{2x}\to 0^-$ et la courbe est au-dessous de la droite asymptote.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Exercice **(MATH06E02B)**

En appliquant le théorème des accroissements finis sous la forme

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \text{ à la fonction } f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

Exprimer θ en fonction de $a \in R_+^*$ et $h \in R_+^*$

Déterminer la limite de θ quand h tend vers 0, a étant fixé

Exercice **(MATH06E02C)**

Montrer que: $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{15} \leq \operatorname{Arcsin} 0,6 < \frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$

Exercice **(MATH06E04B)**

Avec la même méthode, vous donnerez le développement limité au voisinage de 0 de la fonction f définie par $f(x) = e^{x}$.

Exercice **(MATH06E06B)**

Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$

Exercice (MATH06E06C)

Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right).$$

Exercice **(MATH06E07B)**

Déterminer $DL_3(0)$ de $f(x) = Arc\tan(\frac{1}{1-x})$

Exercice **(MATH06E08B)**

Ecrire le développement limité au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 2x + 3} - x\sqrt{x^2 + 1}$$

Vous en déduirez les courbes asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice (MATH06E09B)

Calculer la limite en plus l'infini si elle existe de la fonction *f* définie par :

$$f(x) = \left(2\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)^{x^2}$$

Exercice **(MATH06E09C)**

Déterminer si elle existe $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \ln(chx)}{x^4}$

Exercice **(MATH06E10B)**

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + 2x^2 + 3x + 1} + (x+2)\sqrt{x^2+1}$

Etudier les branches infinies de la courbe (C) représentant les variations de *f*.

Aide (MATH06E01A)

Si on veut utiliser le théorème de Rolle, il faut considérer que l'expression proposée est la dérivée d'une fonction polynôme que vous pouvez trouver.

Retour

Aide (MATH06E02A)

Vous pouvez appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $[p\ ,\ p+1]$ et sommer les égalités obtenues pour p variant de 1 à n.

Retour

Aide (MATH06E02B)

Écrire la formule des accroissements finis pour la fonction *f*, puis isoler θ et conclure.

Vous devez trouver $\theta = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + ah}}{h} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$

Retour

Aide (MATH06E02C)

Appliquez la formule des accroissements finis à la fonction Arcsin sur [0,5 ; 0,6]. Le réel *c* de la formule étant dans l'intervalle $]0,5;0,6[$, donner alors un encadrement approprié et conclure.

Retour

Aide (MATH06E03A)

La résolution de cet exercice est rigoureusement calquée sur l'exemple du cours qui précède. Pour vérifier votre développement, vous pouvez regarder la partie entière dans le formulaire du cours. Pour le calcul numérique, il faut se ramener à l'intervalle $]-\pi; \pi[$ afin de réduire le majorant.

Retour

Aide (MATH06E04A)

Vous devez calculer f', f'' et f''' et essayer de repérer la formule récurrente

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

On admettra ici celle-ci sans la démontrer.

Retour

Aide (MATH06E04B)

Pour cet exercice, il n'y a pas vraiment de problème. Les dérivées successives de f sont égales à f.

Retour

Aide (MATH06E05A)

Il faut noter que $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ et utiliser le développement de $\left(1-u\right)^{\alpha}$

Pour déduire les valeurs $f(0)$, $f'(0)$ etc..... Il faut identifier le résultat final à la formule de Taylor-Young.

Retour

Aide (MATH06E06A)

Vous devez développer le numérateur et le dénominateur jusqu'à l'ordre 6. Ces développements permettront en effet une simplification par x^2. Privilégiez ensuite la division suivant les puissances croissantes du numérateur par le dénominateur.

Retour

Aide (MATH06E06B)

Vous développez d'abord $\ln(1+x)$, puis vous simplifiez le résultat par x. Vous obtenez alors un terme $1+u$, vous pouvez alors composer les développements.

Retour

Aide **(MATH06E06C)**

La quantité « à l'intérieur » du logarithme tend vers 2 quand x tend vers 0. Il faudra donc après avoir développé les racines, factoriser 2.

Pensez à utiliser $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

Retour

Aide (MATH06E07A)

Il faut dériver *f* et effectuer un développement limité au voisinage de 0 puis intégrer celui-ci.
La dérivée de *f* est définie par :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 + x\sqrt{3} + x^2}$$

Le résultat final est :

$$f(x) = \frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}\,x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{\sqrt{3}\,x^4}{8} + o\left(x^4\right)$$

Retour

Aide **(MATH06E07B)**

Il faut dériver *f* puis effectuer un développement limité au voisinage de 0 et intégrer celui-ci.

La dérivée de *f* est définie par :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)}$$

On trouve finalement

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)$$

Retour

Aide (MATH06E08A)

Vous pouvez poser $h = \dfrac{1}{x}$ et utiliser le développement de $(1+x)^{\alpha}$

le résultat est

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + \frac{13}{48x^2} + \frac{5}{128x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Retour

Aide (MATH06E08B)

Il faut factoriser x^4 dans le premier terme et x^2 dans le deuxième.

le résultat est

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{13}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ en } +\infty$$

$$f(x) = 2x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{11}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ en } \quad -\infty$$

Essayer de conclure.

Retour

Aide (MATH06E09A)

Il faut avant tout remettre sous forme exponentielle l'expression de *f*.

Il faut ensuite effectuer le changement de variable $x - \frac{\pi}{4} = h$

Rappelez vous que tan (a + b) = $\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

On doit trouver $\frac{1}{e}$.

Retour

Aide (MATH06E09B)

Il faut effectuer le changement de variable $x = \frac{1}{h}$

Transformer la racine en puissance $\frac{1}{2}$

Remettre la fonction sous forme exponentielle.

On doit trouver $e^{\frac{1}{4}}$.

Retour

Aide (MATH06E09C)

Il faut effectuer un développement à l’ordre 4

On doit trouver $\frac{1}{24}$

Retour

Aide (MATH06E10A)

Il faut poser $h = \dfrac{1}{x}$

On trouve alors $f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Concluez pour les asymptotes.

Retour

Aide (MATH06E10B)

Il faut factoriser x^4 dans la première racine et x^2 dans la deuxième racine. On trouve alors :

$$f(x) = 2x^2 + 2x + \frac{3}{2} + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad en \quad +\infty$$

$$f(x) = -2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad en \quad -\infty$$

Concluez pour les courbes asymptotes !

Retour