POLYNOMES.

1. Introduction.

Nous vous proposons dans cette annexe le chapitre sur les polynômes et les fractions rationnelles. Ce module est important pour la suite du cours. Il ne comporte pas d'exercices supplémentaires, ni de test. Vous pouvez faire les exercices et éventuellement poser des questions au tuteur.

2. Définitions.

On appelle polynôme ou fonction polynôme (ou fonction polynomiale) à une indéterminée *x* sur *R* (ou *C*) l'expression définie par

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad , \quad n \in N$$

où $a_0, a_1, ..., a_n$ sont des éléments de *R* (ou *C*) appelés coefficients du polynôme $P(x)$.

On utilise aussi la notation

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ , } a_i x^i \text{ est un monôme et } a_i \text{ le coefficient du monôme.}$$

Définition

Si $P(x) \neq 0$, on appelle **degré** de $P(x)$, et on note $\deg(P)$ ou encore d°*P*, le plus grand entier naturel *n* tel que $a_n \neq 0$. Le coefficient a_n est le coefficient du terme de plus haut degré.

- Une constante non nulle est un polynôme de degré 0.
- Le polynôme nul n'a pas de degré

- On dit que le polynôme $P(x)$ est pair si et seulement si $\forall p \in N$, $a_{2p+1} = 0$
- On dit que le polynôme $P(x)$ est impair si et seulement si $\forall p \in N$, $a_{2p} = 0$
- La somme et le produit de deux polynômes sont encore des polynômes et :

$$\deg(P+Q) \leq Max(\deg(P),\deg(Q)) \text{ et } \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q).$$

Exemple

a) $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ est un polynôme pair.

b) $P(x) = x^3 - 3x$ est un polynôme impair.

c) Si $P(x) = x^2 + x + 1$ et $Q(x) = -x^2 - 2x + 1$ alors

$P(x) + Q(x) = -x + 2$ et $P(x)Q(x) = -x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x + 1$, et on a bien

$\deg(P+Q) = 1 \leq Max(\deg(P),\deg(Q)) = Max(2,2) = 2$,

$\deg(PQ) = 4 = \deg(P) + \deg(Q) = 2 + 2$.

3. Division euclidienne ou division suivant les puissances décroissantes.

Etant donnés deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$ avec $B(x) \neq 0$, il existe un couple unique de polynômes $(Q(x), R(x))$ vérifiant :

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \text{ et } (\deg(R) < \deg(B) \text{ ou } R(x) = 0).$$

Définition

Le polynôme $Q(x)$ est le **quotient** de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.

Le polynôme $R(x)$ le **reste** de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.

Si $R(x) = 0$, alors $A(x)$ est divisible par $B(x)$ (ou encore $B(x)$ divise $A(x)$).

Exemple

Considérons la division euclidienne du polynôme $A(x) = x^3 + x + 1$ par $B(x) = x^2 + x + 1$. Le quotient $Q(x)$ est donné par $Q(x) = x - 1$ et le reste $R(x)$ par $R(x) = x + 2$. On a donc

$$A(x) = (x^3 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x - 1) + x + 2$$

4. Division suivant les puissances croissantes.

Etant donné un entier naturel h et deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$ avec $B(0) \neq 0$, il existe un couple unique de polynômes $\left(Q(x), R(x)\right)$ vérifiant :

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^{h+1}R(x) \text{ et } \left(\deg(Q) \leq h \quad \text{ou} \quad R(x) = 0\right).$$

Le polynôme $Q(x)$ est le quotient de la division de $A(x)$ par $B(x)$ suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre h et le polynôme $R(x)$ le reste de la division de $A(x)$ par $B(x)$ suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre h.

Disposition pratique de l'opération.

On ordonne les deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$ suivant les puissances croissantes :

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \text{ et } B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

et on pose la division (voir exemple ci-dessous).

Exemple

Déterminons le quotient de la division du polynôme suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 2 du polynôme $A(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 4$ par $B(x) = x^3 + 2$.

4	$+2x^2$	$+x^3$	$+x^4$	$+x^5$	$2 + x^3$
-4		$-2x^3$			$2 + x^2$
0	$+2x^2$	$-x^3$	$+x^4$	$+x^5$	
	$-2x^2$			$-x^5$	
	0	$-x^3$	$+x^4$	0	

Le quotient $Q(x)$ est alors donné par $Q(x) = x^2 + 2$ et le reste $R(x)$ par $R(x) = x - 1$. On a donc

$$A(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 4 = \left(x^3 + 2\right)\left(x^2 + 2\right) + x^3(x - 1).$$

5. Racine d'un polynôme. Ordre de multiplicité.

Définition

Soit a un nombre réel ou complexe.

Un polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-a)$ si et seulement si $P(a)=0$.

Le nombre a est alors appelé *racine du polynôme* $P(x)$. (On dit aussi que a est un *zéro* de $P(x)$)

Un nombre a est racine d'ordre α, ($\alpha \in N^*$), d'un polynôme $P(x)$, si et seulement si $P(x)$ est divisible par $(x-a)^{\alpha}$, mais pas par $(x-a)^{\alpha+1}$(on dit aussi que α est l'*ordre de multiplicité* du zéro a de $P(x)$).

- Une racine simple est une racine d'ordre 1.
- Une racine double est une racine d'ordre 2.

Exemple

Le polynôme $P(x)=x^2+x-6$ admet 2 et –3 comme racines simples (d'ordre 1). Il peut s'écrire sous la forme $P(x)=x^2+x-6=(x-2)(x+3)$; il est donc divisible par $(x-2)$ et par $(x+3)$.

Le polynôme $P(x)=x^4-10x^3+21x^2-16x+4$ admet 1 et 2 comme racines doubles (d'ordre 2). Il peut s'écrire sous la forme

$P(x)=x^4-10x^3+21x^2-16x+4=(x-1)^2(x-2)^2$;

il est donc divisible par $(x-1)^2$ et par $(x-2)^2$.

6. Factorisation des polynômes à coefficients réels. Théorème de D'Alembert.

6.1. Théorème.

Théorème

Tout polynôme $P(x)$ à coefficients complexes, de degré $n>0$, admet exactement n racines, chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité et s'écrit

$$P(x)=a_n(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}....(x-x_p)^{\alpha_p} \text{ avec } \alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_p=n.$$

Les valeurs $x_1, x_2, ...x_p$ sont toutes distinctes.

On dit que l'on a décomposé $P(x)$ en produit de *facteurs premiers*.

Exemple

$P(x)=x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$

6.2. Cas où les coefficients sont réels.

Théorème

Si un polynôme $P(x)$ à **coefficients réels** admet le nombre complexe $a \in C-R$ pour racine, alors le conjugué $\bar{a}$ de a est aussi racine, avec le même ordre de multiplicité. Donc le nombre de racines non réelles de $P(x)$ est pair.

Exemple

Le polynôme $P(x)=x^2-2x+5$ admet $1+2i$ et donc $1-2i$ comme racines simples (d'ordre 1). Il peut s'écrire sous la forme $P(x)=x^2-2x+5=(x-1-2i)(x-1+2i)$.

Conséquence

Tout polynôme à coefficients réels se factorise sous la forme

$Q(x)=(x-a_1)^{n_1}......(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}....(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}$ avec $\Delta_i=p_i^2-4q_i<0$.

Polynômes de degré impair

Tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine dans *R*.

FRACTIONS RATIONNELLES.

1. Définition.

Considérons deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ ($Q(x) \neq 0$)

On appelle fonction rationnelle ou fraction rationnelle $F(x)$ le quotient de $P(x)$ par $Q(x)$ et on note $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

2. Pôle d'une fraction rationnelle.

Soit *a* un nombre réel ou complexe.

2.1. Zéro de $F(x)$.

On dit qu'un nombre *a* est un zéro d'ordre α de $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ si et seulement si *a* est un zéro d'ordre α de $P(x)$ et *a* n'est pas un zéro de $Q(x)$.

2.2. Pôle de $F(x)$.

On dit qu'un nombre *a* est un pôle d'ordre α de $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ si et seulement si *a* est racine d'ordre α de $Q(x)$.

Exemple

1) $F(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, 1 est zéro d'ordre 2 ; $F(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$, 1 est pôle d'ordre 2.

2) La fraction rationnelle $F(x)=\dfrac{x^2-3}{x^3}$ admet $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ comme zéros (simples) et 0 comme pôle d'ordre 3.

3. Partie entière d'une fraction rationnelle.

Soit $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Il existe un couple unique de polynômes à coefficients complexes $(E(x),R(x))$ tel que :

$$\begin{cases} P(x)=Q(x)E(x)+R(x) \\ \deg(R)<\deg(Q) \end{cases}$$

Donc

$$F(x)=E(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

$E(x)$ est appelée la **partie entière** de $F(x)$.

Il en résulte que $E(x)$ et $R(x)$ coïncident avec le quotient et le reste de la division de $P(x)$ par $Q(x)$ suivant les puissances décroissantes.

Remarque

si $\deg(P)<\deg(Q)$ alors $E(x)=0$.

Exemple

1) La fraction rationnelle $F(x)=\dfrac{x^5-3}{x^3}$ admet x^2 comme partie entière ; elle peut s'écrire sous la forme $F(x)=\dfrac{x^5-3}{x^3}=x^2-\dfrac{3}{x^3}$.

2) $F(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

x^3	$+2x^2$	$-2x$	$+1$	x^2+1
$-x^3$		$-x$		$x+2$
0	$2x^2$	$-3x$		
	$-2x^2$		-2	
	0	$-3x$	-2	

D'où $F(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = (x+2)(x^2+1) - 3x - 2$

4. Partie principale d'une fraction rationnelle relative à un pôle.

4.1. Définition.

Définition

On appelle **partie principale** de la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ relative au pôle *a* d'ordre α, l'expression

$\dfrac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \dfrac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots\ldots.. + \dfrac{A_{\alpha}}{x-a}$ où $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{\alpha}$ sont des constantes complexes.

4.2. Théorème.

Théorème

Toute fraction rationnelle se décompose en la somme de sa partie entière et des parties principales relatives aux différents pôles ; cette décomposition est unique.

4.3. Détermination pratique de la partie principale relative à un pôle.

Supposons que la fraction rationnelle $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ admette un pôle a d'ordre α. $Q(x)$ est donc de la forme $Q(x)=(x-a)^{\alpha}Q_1(x),\ Q_1(a)\neq 0$.

Pour obtenir la partie principale relative au pôle a, on pose $X=x-a$ et on effectue la division suivant les puissances croissantes de $P(x-a)$ par $Q(x-a)$ jusqu'à l'ordre $\alpha-1$.

Exemple

La partie principale de la fraction rationnelle $F(x)=\dfrac{x^6+7}{(x-1)^4}$ est égale à

$$\frac{8}{(x-1)^4}+\frac{6}{(x-1)^3}+\frac{15}{(x-1)^2}+\frac{20}{(x-1)}.$$

En effet, $F(x)=\dfrac{x^6+7}{(x-1)^4}=x^2+4x+10+\dfrac{8}{(x-1)^4}+\dfrac{6}{(x-1)^3}+\dfrac{15}{(x-1)^2}+\dfrac{20}{(x-1)}$.

5. Décomposition en éléments simples dans *R*.

Soit la décomposition du polynôme $Q(x)$ en produit de polynômes irréductibles sur R

$Q(x)=(x-a_1)^{n_1}......(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}....(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}$ avec $\Delta_i=p_i^2-4q_i<0$.

Théorème

Toute fraction rationnelle à coefficients réels se décompose sous la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=E(x)+\sum_{\text{pôles réels}}\left(\frac{A_1}{(x-a_i)^{n_i}}+\frac{A_2}{(x-a_i)^{n_i-1}}+....+\frac{A_{n_i}}{x-a_i}\right)$$
$$+\sum_{\substack{\text{pôles complexes}\\ \text{conjuguées}}}\left(\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_ix+q_i)^{m_i}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_ix+q_i)^{m_i-1}}+...+\frac{M_{m_i}x+N_{m_i}}{x^2+p_ix+q_i}\right)$$

où $A_1, A_2,...., M_1, N_1, M_2, N_2,....$ sont des constantes réelles

Cette décomposition est unique.

Sachant que la décomposition est unique, si $F(x)$ est paire, ou impaire, on obtient des relations entre les coefficients.

Définition

Les termes en $\dfrac{A_k}{(x-a_k)^{n_i-i+1}}$, $k=1,....,n_i$ (correspondant aux pôles réels) sont dits éléments simples de première espèce.

Les termes en $\dfrac{M_{m_i}x+N_{m_i}}{(X^2+p_jx+q_j)^{m_i-j+1}}$, $j=1,...,m_i$ (correspondant aux pôles complexes conjugués) sont dits éléments simples de seconde espèce.

6. Méthode pratique de décomposition.

6.1. Cas général.

Si $\deg(P)\geq\deg(Q)$, on cherche la partie entière de $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$; celle-ci s'obtient en calculant le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$. Une fois que $E(x)$ est calculée, on est ramené automatiquement à décomposer une autre fraction $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(P)<\deg(Q)$.

6.2. Pôles de première espèce.

6.2.1. Pôle simple.

Si a est un pôle simple de $F(x)$ alors $Q(x)$ se met sous la forme

$$Q(x)=(x-a)Q_1(x) \text{ avec } Q_1(a)\neq 0$$

et la partie principale relative à a se met sous la forme $\dfrac{\lambda}{x-a}$ avec $\lambda=\dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$.

Ainsi, $F(x)$ est de la forme $F(x) = \dfrac{\lambda}{x-a} + \dfrac{B(x)}{Q_1(x)}$.

De manière pratique, pour déterminer le coefficient λ, on multiplie les deux membres de $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ par $(x-a)$, c'est-à-dire

$$(x-a)F(x) = \frac{P(x)}{Q_1(x)}$$

et on fait $x = a$.

Exemple

Considérons la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)(x+2)}$ et calculons la partie principale relative au pôle simple –1.

Ici, $Q(x) = (x+1)Q_1(x)$ et $Q_1(x) = x+2$. D'où $\lambda = \dfrac{P(-1)}{Q_1(-1)} = \dfrac{-1}{1} = 1$.

De la même manière, la partie principale relative au pôle simple –2 est de la forme $\dfrac{8}{x+2}$.

On a ainsi $F(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)(x+2)} = x - 3 - \dfrac{1}{(x+1)} + \dfrac{8}{(x+2)}$.

Exemple

Décomposer en éléments simples dans *R* la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

La partie entière est nulle, puisque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.

Il n'y a que des pôles réels et donc des éléments simples de première espèce.

La décomposition de $F(x)$ en éléments simples est de la forme :

$$F(x) = \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+3)}$$

où *A*, *B* et *C* sont des nombres réels à déterminer.

En considérant la fraction rationnelle associée et en remplaçant x par -1 dans $(x+1)F(x)$, on obtient $A=\frac{1}{2}$.

En remplaçant x par -2 dans $(x+2)F(x)$, on obtient $B=-3$.

En remplaçant x par -3 dans $(x+3)F(x)$, on obtient $C=\frac{7}{2}$.

La décomposition est donc :

$$F(x)=\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{(x+2)}+\frac{7}{2(x+3)}.$$

Exemple

Décomposer en éléments simples dans R la fraction rationnelle $F(x)=\frac{x^3-2x^2-x-3}{x^2-3x+2}$.

On détermine la partie entière $E(x)$, puisque le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur. On effectue la division euclidienne du numérateur ;

x^3-2x^2-x-3 par le dénominateur x^2-3x+2,

ce qui donne $x^3-2x^2-x-3=(x^2-3x+2)(x+1)-5$

D'où $F(x)=x+1-\frac{5}{x^2-3x+2}$.

Puisque $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, on cherche A et B réels tels que

$$R(x)=-\frac{5}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

En passant aux fonctions rationnelles associées et en remplaçant x par 1 dans $(x-1)R(x)$ on obtient $A=5$. En remplaçant x par 2 dans $(x-2)R(x)$, on obtient $B=-5$. D'où

$$F(x)=\frac{x^3-2x^2-x-3}{x^2-3x+2}=x+1+\frac{5}{x-1}-\frac{5}{x-2}.$$

6.2.2. Pôle simple.

b) Si 0 est pôle multiple d'ordre n alors $F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{x^nQ_1(x)}$ et $Q_1(0)\neq 0$. Les coefficients de la décomposition relative au pôle 0 sont ceux de la division suivant les puissances croissantes de $P(x)$par $Q_1(x)$ à l'ordre $n-1$ (on obtient les coefficients à l'envers).

Exemple

Décomposer en éléments simples dans R la fraction rationnelle $F(x)=\dfrac{1}{x^3(x-1)}$.

La partie entière est nulle, puisque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.

Le dénominateur de $F(x)$ admet deux pôles réels : 0 est un pôle triple et 1 pôle simple

La décomposition de $F(x)$ en éléments simples est de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{x^3(x-1)}=\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}+\frac{B}{x-1}$$

où A_1, A_2, A_3 *et* B sont des nombres réels à déterminer.

En considérant la fraction rationnelle associée et en remplaçant x par 1 dans $(x-1)F(x)$, on obtient $B=1$.

Le pôle triple étant le réel 0, il n'y a pas lieu d'effectuer de translation. On forme la division suivant les puissances croissantes de 1 par $-1+x$ jusqu'à l'ordre 2 ;

$$1=(-1+x)(-1-x-x^2)+x^3$$

d'où par division par $x^3(1-x)$, on obtient

$$F(x)=\frac{1}{x^3(x-1)}=-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

et donc $A_1=-1$, $A_2=-1$ et $A_3=-1$ (On retrouve la valeur $B=1$).

Remarque

Si $a\neq 0$ est pôle multiple d'ordre $n>1$, on effectue d'abord la translation $h=x-a$ et on se ramène au cas précédent en effectuant la division suivant les puissances croissantes de $P(h)=P(x+a)$ par $Q_1(h)=Q_1(x+a)$ à l'ordre $n-1$.

Si l'ordre de multiplicité est 2 ou 3, on procède par identification en remplaçant x par une valeur particulière (en évitant les pôles) ou en multipliant par x et en faisant tendre x vers l'infini (ce n'est possible que si la partie entière est nulle).

Exemple

Décomposer en éléments simples dans R la fraction rationnelle $F(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

La partie entière est nulle. Le dénominateur de $F(x)$ admet deux pôles réels : 1 est un pôle double et -1 pôle triple.

La décomposition de $F(x)$ en éléments simples est de la forme :

$$F(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B_1}{(x+1)^3}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{x+1}$$

où A_1, A_2, B_1, B_2 *et* B_3 sont des nombres réels à déterminer.

Pour le pôle réel double 1, on effectue la translation $x=1+h$ et on effectue la division suivant les puissances croissantes de

$$x^2+1=(1+h)^2+1=2+2h+h^2 \text{ par } (x+1)^3=(2+h)^3=8+12h+6h^2+h^3$$

Le quotient de la division suivant les puissances croissantes de

$$2+2h+h^2 \text{ par } 8+12h+6h^2+h^3 \text{ à l'ordre 1 est } \frac{1}{4}-\frac{h}{8}$$

d'où par division par $h^2(2+h)^3$,

$$\frac{2+2h+h^2}{h^2(2+h)^3}=\frac{1}{4h^2}-\frac{1}{8h}+\ldots\ldots$$

et donc $A_1=\dfrac{1}{4}$ et $A_2=-\dfrac{1}{8}$

Pour le pôle réel triple -1, on effectue la translation $x=-1+k$ et on effectue la division suivant les puissances croissantes de

$$x^2+1=(-1+k)^2+1=2-2k+k^2 \text{ par } (x-1)^2=(-2+k)^2=4-4k+k^2$$

Le quotient de la division suivant les puissances croissantes de

$$2-2k+k^2 \text{ par } 4-4k+k^2 \text{ à l'ordre 2 est } \frac{1}{2}+\frac{k^2}{8}$$

d'où par division par $k^3(2-k)^2$

$$\frac{2-2k+k^2}{k^3(2-k)^2}=\frac{1}{2k^3}+\frac{1}{8k}+\ldots\ldots$$

et donc $B_1=\dfrac{1}{2}$, $B_2=0$ et $B_3=\dfrac{1}{8}$

Par conséquent,

$$F(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)^3}+\frac{1}{8(x+1)}$$

6.3. Pôles de seconde espèce.

Pour déterminer les éléments simples de la forme $\dfrac{M_m x+N_m}{(x^2+px+q)^m}$, $m>1$, en multipliant par $(x^2+px+q)^m$ et en remplaçant x par la racine complexe, en identifiant partie réelle et partie imaginaire des deux membres, on obtient un système de deux équations à deux inconnues sur M_m *et* N_m qui permet de calculer ces deux coefficients.

On considère alors la fraction rationnelle $F(x)-\dfrac{M_m x+N_m}{(x^2+px+q)^m}$ que l'on simplifie, puisqu'il y a unicité de la décomposition en éléments simples.

On calcule alors les coefficients du terme $\dfrac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{(x^2+px+q)^{m-1}}$ en utilisant la méthode précédente, c'est la méthode de diminution du degré.

Cas particulier :

S'il n'y a que des pôles complexes, c'est-à-dire si la fraction rationnelle se présente sous la forme $F(x)=\dfrac{P(x)}{(x^2+px+q)^m}$, on effectue les divisions euclidiennes successives de $P(x)$ (puis des différents quotients) par x^2+px+q

Exemple

Décomposer en éléments simples dans R la fraction rationnelle $F(x)=\dfrac{x^6+2}{(x-1)(x^2+1)^2}$.

1 est pôle simple et i et $-i$ sont pôles doubles.

La décomposition est de la forme

$$F(x)=\frac{x^6+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=x+1+\frac{A}{x-1}+\frac{ax+b}{(x^2+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

Le coefficient A est obtenu en multipliant par $x-1$ et en faisant $x=1$; $A=\dfrac{3}{4}$.

La fraction $\frac{ax+b}{(x^2+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$ peut être calculée par la différence

$$\frac{x^6+2}{(x-1)(x^2+1)^2}-\left(x+1\right)-\frac{3}{4\left(x-1\right)}.$$

On trouve ainsi

$$\frac{ax+b}{(x^2+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}=\frac{-7x^3-7x^2-9x-9}{4\left(x^2+1\right)^2}$$

La division de $-7x^3-7x^2-9x-9$ par x^2+1 suivant les puissances décroissantes donne

$$-7x^3-7x^2-9x-9=\left(x^2+1\right)\left[-7\left(x+1\right)\right]-2\left(x+1\right).$$

On en déduit, en divisant par $4\left(x^2+1\right)^2$:

$$\frac{ax+b}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}=-\frac{x+1}{2\left(x^2+1\right)^2}-\frac{7x+7}{4\left(x^2+1\right)}$$

d'où

$$F\left(x\right)=\frac{x^6+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=x+1+\frac{3}{4\left(x-1\right)}-\frac{x+1}{2(x^2+1)^2}-\frac{7x+7}{4(x^2+1)}.$$

Exercice POLY-E01

Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4$. Calculer $P(1)$ puis $P(2)$.

En déduire la décomposition du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes irréductibles dans R.

Exercice POLY-E02

Montrer que le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ admet une racine double. En déduire la décomposition du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes irréductibles dans R.

Exercice POLY-E03

Soit $P(x)$ un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $x-2$ est 3 et par $x+3$ est 4. Quel est le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x^2 + x - 6$?

Exercice POLY-E04

Déterminer les réels a et b de façon que le polynôme $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + ax + b$ admette la racine $1 + 2i$. Factoriser en polynômes irréductibles dans R.

Exercice POLY-E05

Déterminer les réels a et b de façon que le polynôme $P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$, $(n \geq 2)$ soit divisible par $(x-1)^2$.

Exercice POLY-E06

Dans R, déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 3, divisible par $(x-1)$ et $(x-2)$ et tel que le reste de la division de $P(x)$ par (x^2+1) soit 1.

Exercice POLY-E07

Décomposer en éléments simples sur R, la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{2x^2+5}{(x^2-1)^3}$$

Exercice POLY-E08

Décomposer en éléments simples sur C puis sur R, la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{1}{x^3-1}$$

Exercice POLY-E09

Décomposer en éléments simples sur R, la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

Exercice POLY-E10

Décomposer en éléments simples sur R, la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1}$$

Exercice POLY-E11

Décomposer en éléments simples sur R, la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{x}{x^4-1}$$

Exercice POLY-E12

Décomposer en éléments simples sur R, la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2}$$

Solution POLY-E01S

$P(1) = 0 \Rightarrow$ on peut mettre $(x-1)$ en facteurs,

$P(2) = 0 \Rightarrow$ on peut mettre $(x-2)$ en facteurs,

On peut donc mettre en facteur le produit $(x-1)(x-2)$.

Puisque le polynôme $P(x)$ est du 4$^{\text{ème}}$ degré alors $P(x) = (x-1)(x-2)(ax^2 + bx + c)$

Soit en développant puis en identifiant

$P(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - 2x + 2)$

Le trinôme du second degré est à discriminant négatif

La décomposition en produit de polynômes irréductibles sur *R* est ainsi effectuée.

Remarque

La décomposition en produit de polynômes irréductibles sur *C* est

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-1-i)(x-1+i)$

Retour

Solution POLY-E02S

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$P'(x) = 6x^2 - 6x$

$P''(x) = 12x - 6$

Une racine double $a \in C$ vérifie

$$\begin{cases} P(a) = 2a^3 - 3a^2 + 1 = 0 & (1) \\ P'(a) = 6a^2 - 6a = 0 & (2) \\ P''(a) = 12a - 6 \neq 0 & (3) \end{cases}$$

Seules les valeurs 0 et 1 sont solutions de (2) et 0 n'est pas solution de (1), par contre 1 est solution de (1) , (2) mais pas de (3), donc $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$.

$a = 1$ est racine double et

$P(x) = (x-1)^2(2x+1)$.

Retour

Solution **POLY-E03S**

Le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x-2$ est 3 équivaut à $P(2)=3$.

Le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x+3$ est 4 équivaut à $P(-3)=4$.

Puisque $(x-2)(x+3)=x^2+x-6$ le reste de la division du polynôme $P(x)$ par le polynôme du second degré x^2+x-6 est un polynôme du premier degré donc de la forme $R(x)=ax+b$. On a donc

$$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b \text{ avec } d°P\geq 2$$

$$\begin{cases} P(2)=3 & \Rightarrow 2a+b=3 \\ P(-3)=4 & \Rightarrow -3a+b=4 \end{cases}$$

d'où

$$a=-\frac{1}{5} \text{ et } b=\frac{17}{5}$$

Le reste de la division du polynôme $P(x)$ (vérifiant les conditions de l'énoncé (avec $d°(P)\geq 2$) par le polynôme x^2+x-6 est le polynôme $R(x)=-\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$

Retour

Solution POLY-E04S

$P(x)$ est un polynôme à coefficients réels. S'il admet la racine $z_0 = 1 + 2i \in C - R$.

Il admet aussi la racine complexe conjuguée $\overline{z_0} = 1 - 2i$.

$P(x)$ est divisible par $(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = x^2 - 2x + 5$

En divisant $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + ax + b$ par $x^2 - 2x + 5$, on trouve pour reste

$$(a - 23)x + b - 30$$

Le polynôme $P(x)$ admet la racine $1 + 2i$ si $a = 23$ *et* $b = 30$.

et $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 23x + 30 = (x^2 - 2x + 5)(2x^2 + 7x + 6)$

$$= (x^2 - 2x + 5)(2x + 3)(x + 2)$$

Retour

Solution POLY-E05S

Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-1)^2$ si et seulement si 1 est racine au moins double de l'équation $P(x)=0$ donc si et seulement si $P(1)=P'(1)=0$ et $P''(1)\neq 0$.

$$P(x)=ax^{n+1}+bx^n+1 \qquad \Rightarrow P(1)=a+b+1$$

$$P'(x)=(n+1)ax^n+nbx^{n-1} \quad \Rightarrow P'(1)=(n+1)a+nb$$

$$P''(x)=n(n+1)ax^{n-1}+n(n-1)bx^{n-2}$$

Le système $\begin{cases} a+b+1=0 \\ (n+1)a+nb=0 \end{cases}$ admet une solution unique $\begin{cases} a=n \\ b=-n-1 \end{cases}$.

et $P''(1)=n^2(n+1)-n(n+1)=n(n^2-1)\neq 0$ pour $n\geq 2$

Pour $n\geq 2$, $P(x)$ est divisible par $(x-1)^2$ si et seulement si $a=n$ et $b=-n-1$

Retour

Solution POLY-E06S

Le polynôme $P(x)$ est de degré 3, et puisqu'il est divisible par $x-1$ et par $x-2$, il s'écrit sous la forme $P(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$

Le reste de la division de $P(x)$ par $\left(x^2+1\right)$ est 1 si et seulement si $P(i)=0$, c'est-à-dire si et seulement si $(i-1)(i-2)(ai+b)=1$ ou encore $(3a+b)+i(a-3b)=1$

Puisque le polynôme est à coefficients réels alors *a* et *b* sont réels.

Donc

$$\begin{cases} 3a+b=1 \\ a-3b=0 \end{cases}$$

d'où

$$a=\frac{3}{10} \text{ et } b=\frac{1}{10} \text{ et } P(x)=\frac{1}{10}(3x^3-8x^2+3x+2)$$

Retour

Solution POLY-E07S

La partie entière est nulle, puisque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur. Il y a deux pôles sont réels triples : 1 et -1.

Il n'y a que des éléments simples de première espèce.

En considérant la fraction rationnelle associée, puisque $F(x)$ est paire donc

$$\forall x \in R\ ,\quad F(x) = F(-x)\quad .$$

Tenant compte de l'unicité de la décomposition en éléments simples, on en déduit la forme des parties principales attachées à chaque pôle et l'expression de la décomposition.

$$F(x) = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_3}{(x+1)^3} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1}$$

$$F(-x) = \frac{-A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{-A_1}{x+1} + \frac{-B_3}{(x-1)^3} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{-B_1}{x-1}$$

d'où $B_3 = -A_3$, $B_2 = A_2$, $B_1 = -A_1$.

On détermine seulement la partie principale relative au pôle $x = 1$ par la méthode de division selon les puissances croissantes effectuées à l'ordre 2.

On effectue la translation $x = 1 + h$ et donc $2x^2 + 5 = 2(1+h)^2 + 5 = 7 + 4h + 2h^2$

$$(x+1)^3 = (2+h)^3 = 8 + 12h + 6h^2 (+h^3)\ \text{(terme inutile)}$$

Le quotient de la division suivant les puissances croissantes de

$$7 + 4h + h^2 \text{ par } 8 + 12h + 6h^2 \text{ à l'ordre } 2 \text{ est } \frac{7}{8} - \frac{13}{16}h + \frac{13}{16}h^2$$

soit $A_3 = \frac{7}{8}$, $A_2 = -\frac{13}{16}$, $A_1 = \frac{13}{16}$

Finalement en revenant à la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{7}{8(x-1)^3} - \frac{13}{16(X-1)^2} + \frac{13}{16(x-1)} - \frac{7}{8(x+1)^3} - \frac{13}{16(x+1)^2} - \frac{13}{16(x+1)}$$

Retour

Solution POLY-E08S

$$x^3-1=(x-1)(x-j)(x-\bar{j})=(x-1)(x^2+x+1) \quad \text{avec } j=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

Il y a un pôle réel simple 1 et deux pôles complexes simples conjugués j et $j^2=\bar{j}$

La décomposition de $F(x)$ en éléments simples sur C est de la forme:

$$F(x)=\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-j}+\frac{C}{x-\bar{j}} \quad \text{avec } A \text{ réel et } B \text{ et } C \text{ complexes}$$

Considérons la fraction rationnelle associée, elle est à coefficients réels, elle reste inchangée par passage au conjugué

$$F(x)=\overline{F(x)}=\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{\bar{B}}{x-\bar{j}}+\frac{\bar{C}}{x-j}$$

par suite de l'unicité de la décomposition en éléments simples, on a $C=\bar{B}$

En remplaçant x par 1 dans $(x-1)F(x)$, on obtient $A=\frac{1}{3}$

En remplaçant x par j dans $(x-j)F(x)$, on obtient

$$B=\frac{1}{(j-1)(j-j^2)}=\frac{1}{-1-j+2j^2}=\frac{1}{3j^2}=\frac{j}{3}$$

$$F(x)=\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{j}{x-j}+\frac{\bar{j}}{x-\bar{j}}\right] \quad \text{dans } C$$

Et en regroupant les fractions complexes non réelles:

$$F(x)=\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{-x-2}{x^2+x+1}\right] \quad \text{dans } R$$

Retour

Solution POLY-E09S

Il y a quatre pôles complexes simples deux à deux conjugués i et $-i$ puis $2i$ et $-2i$.

La base de la décomposition de $F(x)$ en éléments simples sur R est :

$$F(x)=\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{Sx+T}{x^2+4}$$

On considère la fonction rationnelle $F(x)$ associée.

La fonction rationnelle associée est impaire $\forall x\in R$, $F(-x)=-F(x)$

$$F(-x)=-F(x)=\frac{-x}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{-Mx+N}{x^2+1}+\frac{-Sx+T}{x^2+4}=\frac{-Mx-N}{x^2+1}+\frac{-Sx-T}{x^2+4}$$

Par suite de l'unicité de la décomposition en éléments simples :

$$N=-N \quad \text{et} \quad T=-T\Rightarrow N=T=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(xF(x))=0\Rightarrow M+S=0$$

On remplace x par 1 $\Rightarrow M=\frac{1}{3}$

Finalement :

$$F(x)=\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{x}{3\left(x^2+1\right)}-\frac{x}{3\left(x^2+4\right)}$$

Retour

Solution **POLY-E10S**

Le polynôme du quatrième degré x^4+x^2+1 doit être décomposé en produits de polynômes irréductibles dans R

$$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

La base de la décomposition de $F(x)$ en éléments simples sur R est :

$$F(x)=\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{Mx+N}{x^2+x+1}+\frac{Sx+T}{x^2-x+1}$$

La fonction rationnelle associée est paire $F(x)=F(-x)$.

$$F(-x)=\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{-Mx+N}{x^2-x+1}+\frac{-Sx+T}{x^2+x+1}$$

par suite de l'unicité de la décomposition en éléments simples :

$M=-S$ et $N=T$

En remplaçant x par 0, on obtient

$$1=N+T\Rightarrow N=T=\frac{1}{2}$$

En remplaçant (par exemple) x par 1, on obtient :

$$\frac{1}{3}=\frac{M}{3}+\frac{1}{6}+S+\frac{1}{2}\Rightarrow M=\frac{1}{2}\text{ et } S=-\frac{1}{2}$$

Finalement $F(x)=\dfrac{1}{x^4+x^2+1}=\dfrac{x+1}{2\left(x^2+x+1\right)}+\dfrac{-x+1}{2\left(x^2-x+1\right)}$

Remarque

En utilisant les racines cubiques de l'unité et plus précisément le nombre

$j=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, on obtient en remplaçant x par j dans $(x^2+x+1)F(x)$

$\dfrac{1}{j^2-j+1}=Mj+N$ soit en utilisant la relation $1+j+j^2=0$

$\dfrac{1}{j^2-j+1}=\dfrac{1}{-2j}=-\dfrac{j^2}{2}=\dfrac{1}{2}(1+j)=Mj+N$ et l'on retrouve $M=\dfrac{1}{2}$ *et* $N=\dfrac{1}{2}$

Retour

Solution POLY-E11S

Le polynôme du quatrième degré x^4-1 doit être décomposé en produit de polynômes irréductibles dans R

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

La base de la décomposition de $F(x)$ en éléments simples sur R est :

$$F(x)=\frac{x}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1} \text{ avec } A, B, M \text{ et } N \text{ réels à déterminer}$$

La fonction rationnelle associée est impaire $F(x)=-F(-x)$.

$$F(-x)=\frac{A}{-x-1}+\frac{B}{-x+1}+\frac{-Mx+N}{x^2+1}=-\frac{A}{x+1}-\frac{B}{x-1}+\frac{-Mx+N}{x^2+1}$$

En considérant $-F(x)$ et par suite de l'unicité de la décomposition en éléments simples :

$$A=B \text{ et } N=0$$

En remplaçant x par 1 dans $(x-1)F(x)$, on obtient $A=B=\dfrac{1}{4}$

$$\lim_{x\to+\infty}(xF(x))=0=M+A+B\Rightarrow M=-\frac{1}{2}$$

Finalement

$$F(x)=\frac{x}{x^4-1}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}-\frac{\frac{x}{2}}{x^2+1}=\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{x}{2(x^2+1)}$$

Retour

Solution POLY-E12S

La base de la décomposition de $F(x)$ en éléments simples sur R est :

$$F(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}$$

On considère la fonction rationnelle associée et en remplaçant x par 0 dans $xF(x)$, on obtient

$A=1$

On revient aux fractions rationnelles et l'on forme

$$F(x) - \frac{1}{x} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}$$

$F(x) - \dfrac{1}{x}$ ne contient plus le pôle 0

$$F(x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-(x^2+x+1)^2}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{x(-x^3-2x^2-3x-2)}{x(x^2+x+1)^2}$$

La division euclidienne ou division suivant les puissances décroissantes de

$-x^3-2x^2-3x-2$ par x^2+x+1 donne

$-x^3-2x^2-3x-2 = (x^2+x+1)(-x-1)-x-1$

et donc $M_1 = N_1 = M_2 = N_2 = -1$

$$F(x) = \frac{1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x-1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{-x-1}{x^2+x+1}$$

Retour