6-LES NOMBRES COMPLEXES

1 Généralités

1.1 Introduction.

1.1.1 Historique.

Rappel

Considérons l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Nous avons établi les résultats suivants :

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, ces racines sont confondues et égales à $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'ensemble des solutions est vide.

En particulier, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution.

Histoire

Au XVI^ème siècle, Bombelli et Cardan ont introduit un nombre solution de cette équation. Un tel nombre est dit *imaginaire* (car ce n'est pas un nombre réel). Il sera longtemps noté $\sqrt{-1}$, puis en 1777, Euler introduit pour le première fois la notation du nombre *i*, qui vérifie l'égalité : $i^2 = -1$.

1.1.2 Nombres complexes.

Nous proposons une introduction des complexes très sommaire avec la démarche suivante :

- Trouver des solutions à l'équation $x^2 + 1 = 0$.
- Imaginer, en bouleversant plusieurs siècles d'histoire mathématique, un *nombre* dont le carré serait négatif, noté *i* et vérifiant $i^2 = -1$.

- Imaginer, toujours dans l'irréel, pouvoir multiplier ce nombre i par nos bons vieux réels ; cela donnerait des *nombres imaginaires* de la forme bi, $b \in R$.

  $x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4 = 4i^2 \iff x = 2i \;\; ou \;\; x = -2i$

- Enfin pouvoir ajouter à ces nouveaux nombres un réel *a*, ce qui donnerait des *nombres complexes* de la forme $a + bi$ où *a* et *b* sont des réels, de telle sorte que pour $b = 0$, on retrouve l'ensemble des réels.

- Décider enfin d'appliquer à ces nombres les règles usuelles du calcul

Exemple

$$3x^2 + 7 = 0 \iff x^2 = -\frac{7}{4} = \frac{7}{4}i^2 \iff x = \frac{\sqrt{7}}{2}i \;\; ou \;\; x = -\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \iff (x+1)^2 + 4 = 0 \iff (x+1)^2 = -4 = 4i^2$$
$$\iff (x+1) = 2i \;\; ou \;\; (x+1) = -2i \iff x = -1 + 2i \;\; ou \;\; x = -1 - 2i$$

$$(i+1)^2 = i^2 + 2i + 1 = -1 + 2i + 1 = 2i$$
$$(i+1)^3 = (i+1)^2(i+1) = 2i \times (i+1) = 2i^2 + 2i = -2 + 2i$$

$$(2-i)(1+3i) = 2 + 6i - i - 3i^2 = 5 + 5i$$

- Nous n'avons plus qu'à noter cet ensemble *C*. Ses éléments sont appelés nombres complexes.

Remarque

Les nombres de la forme $a + bi$ a et b réels, se suffisent à eux mêmes : en les ajoutant et en les multipliant, on obtient des nombres de la même forme.

1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe.

1.2.1 Définitions

Définition

L'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ où *a* et *b* sont des nombres réels et *i* le nombre vérifiant $i^2 = -1$, muni des opérations addition et multiplication ayant les mêmes propriétés que dans *R*, est appelé ensemble des nombres complexes.

L'écriture $z = a + ib$ avec a réel , b réel et $i^2 = -1$ est **la forme algébrique** d'un nombre complexe.

- a est appelée **partie réelle** de z , notée $Re(z)$
- b est appelée **partie imaginaire** de z , notée $Im(z)$

Exemple

$Re(1-2i) = 1$, $Im(1-2i) = -2$

$Re(4i) = 0$, $Im(4i) = 4$

$Re(-3) = -3$, $Im(-3) = 0$

Attention : La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel. Il s'agit de b et non de bi.

Définition

Tout nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelée **nombre imaginaire pur.**

1.2.2 Propriétés immédiates

Propriétés

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

- $Im(z) = 0 \iff z \in R$
  $Re(z) = 0 \iff z \text{ est un imaginaire pur}$

Remarque

- Certains ouvrages considèrent que 0 n'est pas un imaginaire pur.

Nous avons choisi d'inclure 0 dans l'ensemble des imaginaires purs. Nous verrons que ce choix permet de mettre en bijection l'ensemble des imaginaires purs et l'ensemble des réels *R*, cela simplifie en général les rédactions d'exercices et rend cohérent l'interprétation géométrique de ces nombres que nous traiterons plus loin.

- Notons que la relation $i^2 = -1$ permet de calculer les puissances de i :
  $i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1 \quad \ldots\ldots$
  et plus généralement
  $i^{4k} = 1 \qquad i^{4k+1} = i \qquad i^{4k+2} = -1 \qquad i^{4k+3} = -i \qquad \forall k \in \mathrm{N}$

1.2.3 Résolution de l'équation de l'équation du second degré à coefficients réels

$(E)\ :\ az^2+bz+c=0 \quad (a,b,c)\in R^*\times R^2$

$\Delta=b^2-4ac$

Dans le rappel, nous avons donné les solutions de cette équation lorsque $\Delta\geq 0$.
Envisageons le cas $\Delta<0$

$$az^2+bz+c=0 \ \Leftrightarrow\ a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-|\Delta|}{4a^2}=\frac{i^2|\Delta|}{4a^2}\ \Leftrightarrow\ z_1=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}i \quad ou \quad z_2=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}i$$

$$\Leftrightarrow z_1=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad ou \quad z_2=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Finalement, l'équation admet comme solutions deux racines complexes distinctes $z_1\ et\ z_2$. Ces deux nombres ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées, on dit qu'ils sont conjugués.

Exemple

$z^2+z+1=0 \quad , \quad \Delta=-3$

Les deux solutions sont donc les complexes : $z_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad et \quad z_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Remarque

La factorisation du trinôme est la même que dans *R.*

$$az^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=\begin{cases} a\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 & si\ \ \Delta=0\\ a(z-x_1)(z-x_2) & si\ \Delta>0\\ a(z-z_1)(z-z_2) & si\ \Delta<0\end{cases}$$

Où $z_1\ et\ z_2$ sont les deux racines complexes définies ci-dessus, et $x_1\ et\ x_2$ les deux racines réelles.

Exercice (MATH06E01A)

On considère le polynôme complexe : $z^3 - 2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2 + 4\left(1+i\sqrt{3}\right)z - 8i$

1) Montrer que ce polynôme admet une racine imaginaire pure.
2) Factoriser ce polynôme et résoudre : $z^3 - 2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2 + 4\left(1+i\sqrt{3}\right)z - 8i = 0$

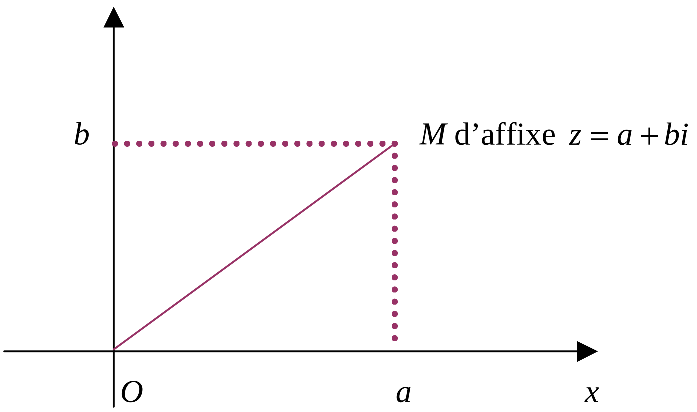
1.2.4 Représentation géométrique d'un nombre complexe:

Un complexe est entièrement déterminé par ses parties réelle et imaginaire, c'est à dire par la donnée du couple de réels (a,b). Il paraît donc tout naturel d'associer à chaque nombre complexe $z = a + bi$, le point M de coordonnées (a,b). Nous mettons ainsi en bijection l'ensemble C des nombres complexes et l'ensemble (P) des points du plan.

En fait, cela suffit à justifier la création de l'ensemble des nombres complexes. Rappelez-vous que l'ensemble des réels a été introduit afin de mettre en bijection un ensemble de nombres avec la droite réelle, c'est à dire afin de pouvoir mesurer toutes les distances.

Soit un plan (P) muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Dans le plan ($P$) le point M de coordonnées (a,b) est appelé **point image** du nombre complexe $a+ib$.

De même, le nombre complexe $a+ib$ est appelé **affixe** du point M.



On peut également mettre en bijection l'ensemble des nombres complexes, et l'ensemble des vecteurs du plan.

Le vecteur $\vec{U}$ de coordonnées (a,b) est appelé **vecteur image** du nombre complexe $a+ib$.

De même, le nombre complexe $a+ib$ est appelé **affixe** du vecteur $\vec{U}$.

Remarque

- L'ensemble des points du plan dont les affixes sont réels est l'axe des abscisses
- L'ensemble des points du plan dont les affixes sont des imaginaires purs est l'axe des ordonnées.

Le centre du repère O intersection des axes a donc pour affixe le seul complexe à la fois réel et imaginaire pur 0.

2 Opérations

On considère deux complexes $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ où a, b, a' et b' sont des réels.
Dans ce qui suit, nous chercherons à présenter les complexes sous la forme algébrique $a+ib$.

2.1 Somme

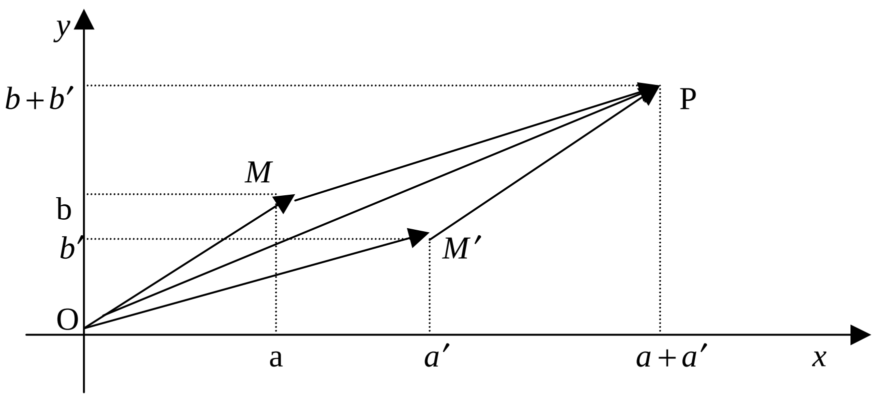
$$\boxed{z+z'=(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+(b+b')i}.$$

Soit $\overrightarrow{OM}$ le vecteur image du complexe z et $\overrightarrow{OM'}$ le vecteur image du complexe z'.

Considérons le point P vérifiant :

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$, le point P est tel que $OMPM'$ est un parallélogramme.

Par définition, $\overrightarrow{OP}$ a pour affixe $z+z'$



Les parties réelle et imaginaire d'une somme de nombres complexes sont données par les formules suivantes :

- $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$
  $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$

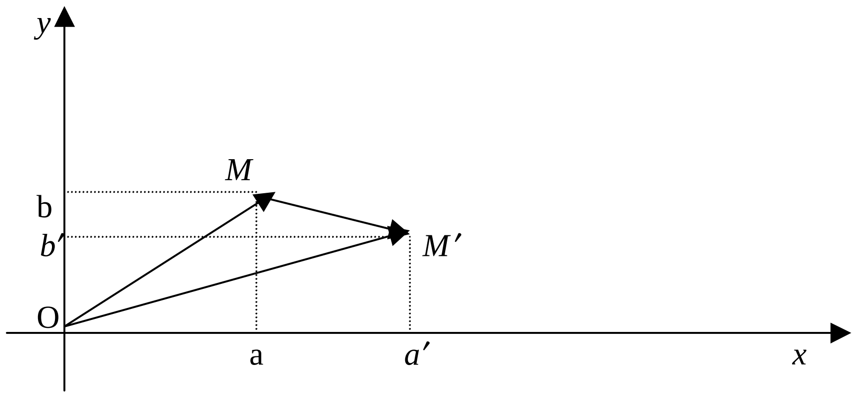
2.2 Différence

$$\boxed{z - z' = (a+ib) - (a'+ib') = (a-a') + (b-b')i}.$$

Soit $\overrightarrow{OM}$ le vecteur image du complexe z et $\overrightarrow{OM'}$ le vecteur image du complexe z'.

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$



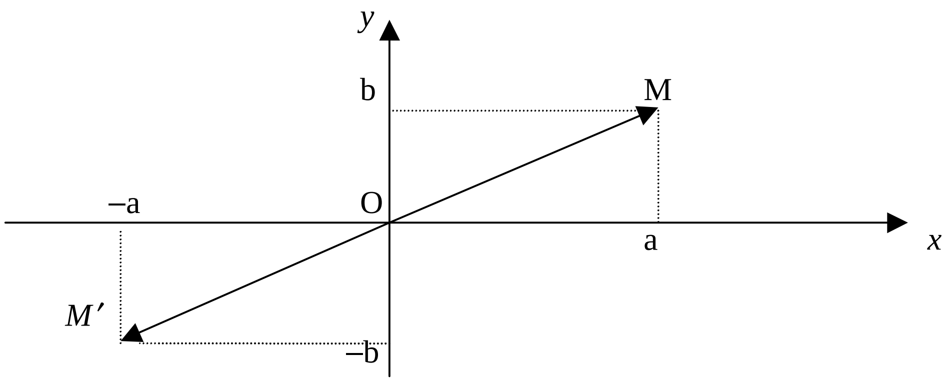
Les parties réelle et imaginaire d'une différence de nombres complexes sont données par les formules suivantes :

- $\mathrm{Re}(z-z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z')$
  $\mathrm{Im}(z-z') = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z')$

2.3 Opposé

L'opposé du complexe z est le complexe $\boxed{z' = -z = -a - bi}$.

Soit $\overrightarrow{OM}$ le vecteur image du complexe z et $\overrightarrow{OM'}$ le vecteur image du complexe opposé $z' = -z$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'origine O.



2.4 Produit

$$\boxed{zz' = (a+ib)(a'+ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)}$$

$$\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z).\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z).\mathrm{Im}(z')$$
$$\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z).\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z).\mathrm{Re}(z')$$

Nous donnerons une interprétation géométrique à la fin de ce chapitre.

2.5 Quotient

Exemple

Soit le complexe $z = \dfrac{2-3i}{1+2i}$, d'après les règles de calcul précédentes, on peut noter la propriété : $\boxed{(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2}$.

On peut utiliser celle-ci pour retrouver la forme algébrique de ce complexe
$$z = \frac{2-3i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{2-4i-3i+6i^2}{1+4} = \frac{-4-7i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

Vous remarquerez la similitude de la méthode avec celle déjà rencontrée pour le calcul sur les racines notamment. On parlait alors de forme conjuguée. Il est temps de définir plus précisément cette notion.

3 Conjugué et module.

3.1 Conjugué

3.1.1 Définition

Définition

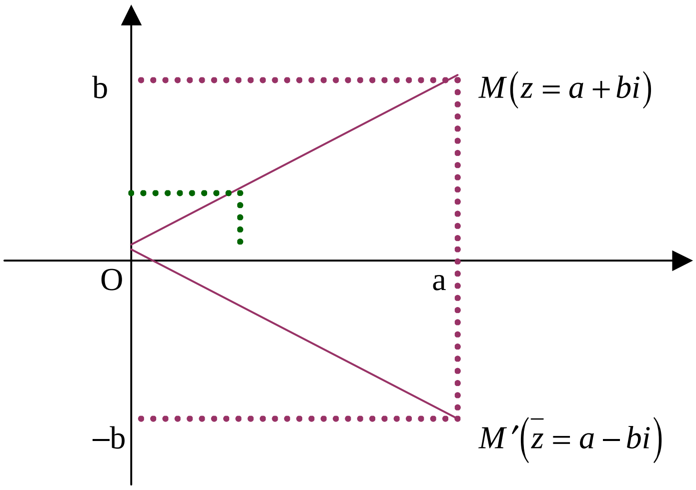
Soit $z = a + bi, (a,b) \in R^2$, un nombre complexe. Le conjugué de z se note $\bar{z}$ et vaut : $\bar{z} = a - bi$.

Exemple

$$z = 1+i \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 1-i$$
$$z = 4i \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = -4i$$

3.1.2 Interprétation géométrique.

Soit M un point quelconque du plan (P) d'affixe z. L'affixe du point M', symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, est le nombre complexe conjugué de z noté $\bar{z}$.



3.1.3 Propriétés

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes quelconques.
On note : $z = a + bi, (a,b) \in R^2$ *et* $z' = a' + b'i, (a',b') \in R^2$

- $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.
- $\bar{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a + bi$.
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathrm{R}$.
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$

Nous vous laissons le soin d'écrire les démonstrations des deux dernières propriétés.

Exercice **MATH05E02A**

Ecrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{1+3i}{2+5i}, \quad \frac{3-2i}{4-i}, \quad \frac{2+i}{1+i}.$$

3.2 Module.

3.2.1 Définition

Définition

Soit z un nombre complexe quelconque d'écriture algébrique $z = a + bi, (a,b) \in R^2$ et M le point image de z dans le plan (P) muni du repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On appelle **module** de z, noté r ou $|z|$ la longueur (ou norme) de $\overrightarrow{OM}$

$$\boxed{|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM}$$

Exemple

$$z = 1 + i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

Remarque

On peut chercher l'ensemble des points du plan dont les affixes vérifient $|z| = 1$.
Il s'agit en fait des points M du plan tels que $OM = 1$. C'est donc le cercle de centre O et de rayon 1.

D'une manière plus générale, on cherche l'ensemble des points M plan dont les affixes z vérifient : $|z - z_0| = k, \quad k \in R^+, z_0 \in C$.
On considère le point A d'affixe z_0, on a établi précédemment que $|z - z_0| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| = AM$. L'ensemble cherché est donc le cercle de centre A et de rayon k. (si $k = 0$, le cercle est réduit à son centre)

3.2.2 Propriétés

Propriétés

- Si z est réel, sa valeur absolue et son module sont confondus (cela justifie en fait la notation $|z|$).

- $|z|$ est un nombre réel positif
- Pour tout nombre complexe z : $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- Pour tout nombre complexe z : $|z| = |\bar{z}|$
- Pour tout nombre complexe z : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$,
- Pour tous les nombres complexes z et z' , $|zz'| = |z||z'|$,
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).
- Si $z \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Démonstration

Nous notons comme d'habitude : $z = a + bi, (a,b) \in R^2$

- *La première propriété est évidente*

  En rappelant que $|z| = OM \quad et \quad |z - z'| = M'M$, On a :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow \; OM = 0 \Leftrightarrow O = M \; \Leftrightarrow z = 0$
- $|z - z'| = M'M \leq M'O + OM = |z| + |z'|$

  Donc $\; |z + z'| \leq |z| + |-z'| = |z| + |z'|$
- $|z| = |\bar{z}|$ relève de la définition même du module.
- On a déjà démontré que $z\bar{z} = a^2 + b^2$ ce qui prouve $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- On démontre que $|zz'| = |z||z'|$

  $|zz'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2} = \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2}$

  $|z||z'| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2}$

  Donc pour tous les nombres complexes z et z' , $|zz'| = |z||z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}$

3.2.3 Nombres complexes de module 1

Nous avons déjà abordé cette question précédemment. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème

L'ensemble des points M du plan dont les affixes ont pour module 1 est le cercle trigonométrique.

Conséquence

- Nous avons vu dans le chapitre sur la trigonométrie que les coordonnées de ces points pouvaient s'écrire $(cos\,\theta; sin\,\theta)$ *où* $\theta \in R$.
  Donc tout nombre complexe de module 1 peut se s'écrire $z = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$

- De plus nous pouvons remarquer que si le complexe z est non nul, $\frac{z}{|z|}$ a pour module 1. Donc pour les complexes non nuls, il existe $\theta \in R$ tel que $\frac{z}{|z|} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$ soit $z = |z|(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$

- Finalement tout complexe non nul peut se mettre sous la forme $z = |z|(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$ où θ est donné à $2k\pi$ près, $k \in Z$.

Nous venons de mettre en évidence une nouvelle écriture du complexe z, valable pour les complexes non nuls.

4 Forme trigonométrique

4.1 Argument

4.1.1 Définition

Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M le point image de z dans le plan (P) muni du repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On appelle **argument** de z, noté $Arg(z)$ toute mesure, en radians, de l'angle de vecteurs $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$. Donc, $Arg(z)$ est défini modulo 2π (c'est-à-dire à $2k\pi$ près).

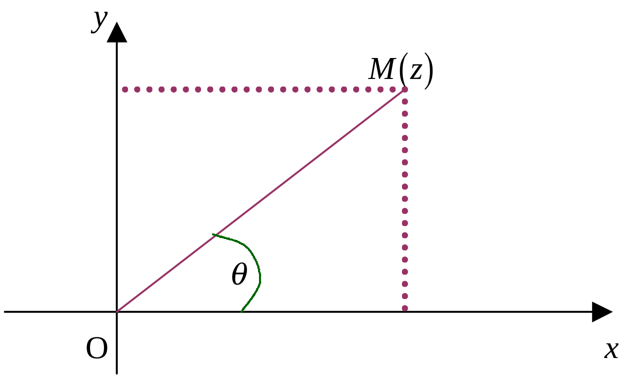
Remarque

On parlera de façon abusive de l'argument d'un nombre complexe étant entendu qu'il s'agit de l'argument, modulo 2π, c'est à dire de toute mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ peut s'écrire

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta]$$

Cette écriture est **la forme trigonométrique** du nombre complexe z



Remarque

Le complexe nul n'a pas de forme trigonométrique.

Exemple

En plaçant dans le plan les points images des complexes considérés et en revenant à la définition, on établit :

$$arg(1) = 0, \quad arg(-3) = \pi, \quad arg(2i) = \frac{\pi}{2}, \quad arg\left(-i\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

4.1.2 Recherche pratique de l'argument d'un complexe donné non nul

En identifiant la forme algébrique $z = a + bi$ d'un complexe et sa forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, on établit :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}.$$

Remarque

La connaissance de deux lignes trigonométriques est nécessaire pour déterminer modulo 2π sans ambiguïté, $Arg(z)$, puisqu'il s'agit d'un angle de vecteurs.
Vous remarquerez que cela n'a de sens que si le complexe est non nul.

Exemple

Soit le complexe $z = 1 - i$, on a $|1-i| = \sqrt{2}$ et on peut donc écrire :

$$\begin{cases} cos\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\,\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in Z$$

Soit le complexe $z = 2 - i$, on a $|2-i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ et on peut donc écrire :

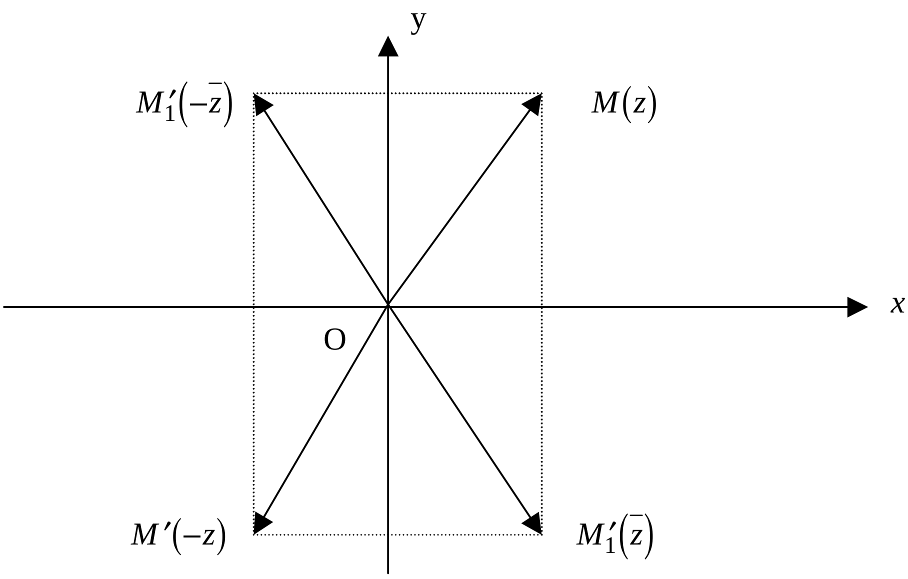
$$\begin{cases} cos\,\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ sin\,\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \theta \approx -0{,}46 + 2k\pi, \quad k \in Z$$

Nous voyons donc que nous n'aurons pas toujours la chance de tomber sur des lignes trigonométriques usuelles.

4.1.3 Propriétés

Notons que :

- $\begin{cases} z = z' \\ z \;\; et \;\; z' \;\; non \; nuls \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ arg\,z = arg\,z' + 2k\pi, \quad k \in Z \end{cases}$
- $arg\,\bar{z} = -arg\,z + 2k\pi, \quad k \in Z$
- $arg(-z) = arg\,z + \pi + 2k\pi, \quad k \in Z$
- $arg(-\bar{z}) = \pi - arg\,z + 2k\pi, \quad k \in Z$



En observant le dessin ci-dessus on retrouve les résultats énoncés précédemment.

Exemple

Trouver le module et l'argument du complexe $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$.

Ce complexe a pour module 1.

On peut toujours « dérouler » la méthode du paragraphe 4.1.2, mais on peut également chercher à le mettre sous la forme $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ directement à l'aide des formules trigonométriques.

$$z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$$

Cela nous permet de conclure qu'il s'agit du complexe $\left[1;\frac{4\pi}{5}\right]$

Exemple

Autre exemple d'un complexe de module 1: $z=-\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$

On peut « intuitivement » comprendre qu'il faut trouver α pour transformer $-\sin\frac{\pi}{5}$ en $\cos\alpha$ et $\cos\frac{\pi}{5}$ en $\sin\alpha$.

On utilise alors : $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

Donc : $z=-\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10}$

Finalement $z=-\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}=\left[1;\frac{7\pi}{10}\right]$

Exercice (MATH05E03A)

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -2 + 2i$
- $z_2 = \left(-1 + \sqrt{3}i\right)$

Remarque

Il est important également de donner la forme algébrique d'un complexe connaissant son module et un argument.

Exemple

Donnons la forme algébrique du complexe z de module $2\sqrt{2}$ et d'argument $-\dfrac{3\pi}{4}$.

On écrit : $z = 2\sqrt{2}\left(cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\, sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 - 2i$

4.2 Théorème fondamental

Théorème

Pour tous les nombres complexes z et z' non nuls, on a :

- $arg(zz') = arg\, z + arg\, z \quad [2\pi]$
- $|zz'| = |z||z'|$ (propriété déjà vue)

On écrira : $zz' = [r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr',\theta + \theta']$

Démonstration

Posons sous forme trigonométrique : $z = r(cos\,\theta + i\, sin\,\theta)$ *et* $z' = r'(cos\,\theta' + i\, sin\,\theta')$

$zz' = rr'\left((cos\,\theta\, cos\,\theta' - sin\,\theta\, sin\,\theta') + i(sin\,\theta\, cos\,\theta' + cos\,\theta\, sin\,\theta')\right)$

Or on se rappelle les formules fondamentales de trigonométrie :

$$cos\,\theta\, cos\,\theta' - sin\,\theta\, sin\,\theta' = cos(\theta + \theta')$$

$$sin\,\theta\, cos\,\theta' + cos\,\theta\, sin\,\theta' = sin(\theta + \theta')$$

On peut donc écrire $zz' = rr'\left(cos(\theta + \theta') + i\, sin(\theta + \theta')\right)$

Puisque $rr' > 0$, on obtient donc les résultats :
$arg(zz') = arg\, z + arg\, z' \quad [2\pi]$ et $|zz'| = |z||z'|$

Retenez : quand on multiplie deux complexes non nuls, on **A**joute les **A**rguments et on **M**ultiplie les **M**odules.

Théorème

Il s'agit en fait d'un corollaire.

Pour tous les nombres complexes *z* et z' non nuls, et pour tout entier naturel *n*, on a :

- $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg\, z \quad [2\pi]$
- $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg\, z - arg\, z' \quad [2\pi]$
- $arg\left(z^n\right) = n\, arg\, z \quad [2\pi]$

Démonstration

- $arg\left(\frac{1}{z}z\right) = arg(1) = 0 = arg\left(\frac{1}{z}\right) + arg\, z \quad [2\pi]$ donc $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg\, z \quad [2\pi]$
- $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg\left(z\frac{1}{z'}\right) = arg\, z + arg\frac{1}{z'} = arg\, z - arg\, z' \; [2\pi]$
- Démontrons cette propriété par récurrence sur *n*.

  Posons la proposition $P_n \; : \; arg\left(z^n\right) = n\, arg\, z \quad [2\pi]$

  P_0 est vraie

  Supposons que $\forall k \in [0..n] \;\; P_k$ est vraie

  $arg\left(z^{n+1}\right) = arg\left(z^n z\right) = arg\, z^n + arg\, z = n\, arg\, z + arg\, z = (n+1)\, arg\, z \; [2\pi]$

  Donc P_{n+1} est vraie, ce qui prouve que la proposition est vraie pour tout *n*.

Conséquence

Formule de MOIVRE

$$\left(r(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

ou encore $[r,\theta]^n = \left[r^n, n\theta\right]$

Cette formule découle immédiatement des propriétés précédentes.

Exercice (MATH06E04A)

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}, \quad z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}\right)^{30}, \quad z_3 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^5$$

5 Forme exponentielle d'un nombre complexe.

5.1 Notation $e^{i\theta}$

5.1.1 Approche

Considérons la fonction *f* définie sur *R* par : $f(\theta) = cos\theta + i\,sin\theta$

On a démontré : $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$ *et* $f(n\theta) = \left(f(\theta)\right)^n$.

On pense alors aux propriétés de la puissance.

De plus si on prolonge les propriétés de la dérivation :

$f'(\theta) = -sin\theta + i\,cos\theta = i^2\,sin\theta + i\,cos\theta = if(\theta)$

Nous verrons que la fonction définie sur *R* qui vérifie : $f'(x) = kf(x)$ *et* $f(0) = 1$ est la fonction $x \mapsto e^{kx}$

5.1.2 Définition

On a alors l'idée de noter $f(\theta) = cos\theta + i\,sin\theta = e^{i\theta}$. Cette écriture est la forme exponentielle du complexe $cos\theta + i\,sin\theta$.

En effet :

$e^{i\theta}e^{i\theta'} = (cos\theta + i\,sin\theta)(cos\theta' + i\,sin\theta') = \left(cos(\theta+\theta') + i\,sin(\theta+\theta')\right) = e^{i(\theta+\theta')}$

Et $\left(e^{i\theta}\right) = (cos\theta + i\,sin\theta)^n = cos(n\theta) + i\,sin(n\theta) = e^{in\theta}$

Définition

En utilisant la notation exponentielle $e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$, tout nombre complexe non nul de module *r* et d'argument θ se note $z = re^{i\theta}$.
Cette écriture est **la forme exponentielle** du nombre complexe *z*.

Conséquence

Nous avons établi au paragraphe précédent la propriété fondamentale suivante :

Pour tous les nombres complexes *z* et z' non nuls, on a :
- $arg(zz') = arg\,z + arg\,z \quad [2\pi]$
- $|zz'| = |z||z'|$ (propriété déjà vue)

Nous écrirons plus simplement :

$$\boxed{zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad et \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}}$$

Exemple

Forme exponentielle de $z = 1 + i$.

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

5.2 Formules d'Euler

5.2.1 Théorème

Théorème

En adoptant la notation exponentielle on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta \\ e^{-i\theta} = cos\,\theta - i\,sin\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\,\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ sin\,\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}}$$

Il suffit d'additionner ou de soustraire membre à membre pour obtenir ces résultats, appelées **Formules d'Euler**.
Vous noterez que le dénominateur de $sin\,\theta$ est $2i$.

5.2.2 Application : linéarisation des polynômes trigonométriques

Une fonction polynôme trigonométrique est une somme de termes du type $a\cos^n(x)$, $b\sin^m(x)$ ou $c\cos^n(x)\sin^m(x)$ $(n,m)\in N^2$ et $(a,b,c)\in R^3$.

Il s'agit de transformer un produit du type $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ en une somme de termes du type $a\cos(\alpha x)$ ou $b\sin(\beta x)$.
Cette opération s'appelle la **linéarisation du polynôme.**

Exemple

Linéarisons la fonction $f(x)=\cos^4(x)$. En utilisant la formule du binôme et le triangle de Pascal on retrouvera la formule :
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$$\cos^4(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$
$$=\frac{1}{2^4}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+6\right)$$

Il suffit maintenant d'utiliser les formules d'Euler suivantes :

$$2\cos(4x)=e^{4ix}+e^{-4ix} \quad et \quad 2\cos(2x)=e^{2ix}+e^{-2ix}$$

On trouve alors :

$$\cos^4(x)=\frac{1}{2^4}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+6\right)$$
$$=\frac{1}{2^4}\left(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6\right)=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$

Nous verrons dans un prochain chapitre que cette linéarisation permet l'intégration des polynômes trigonométriques.

Exemple

Linéarisons : $sin^3 x\, cos^2 x$

$$sin^3 x\, cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8i^3}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3 \frac{1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{32i}\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{32i}\left(e^{5ix}-e^{3ix}-2e^{ix}+2e^{-ix}+e^{-3ix}-e^{-5ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{32i}\left(e^{5ix}-e^{-5ix}-\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)-2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{32i}\left(2i\, sin(5x)-2i\, sin(3x)-4i\, sin\, x\right)$$

$$= -\frac{1}{16} sin(5x)+\frac{1}{16} sin(3x)+\frac{1}{8} sin\, x$$

On peut vérifier pour $x=\frac{\pi}{3}$,

$$sin^3\frac{\pi}{3} cos^2\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{32}$$

$$-\frac{1}{16} sin(5x)+\frac{1}{16} sin(3x)+\frac{1}{8} sin\, x = -\frac{1}{16} sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\frac{1}{16} sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)+\frac{1}{8} sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{32}+\frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{32}$$

Exercice **(MATH06E05A)**

Linéariser le polynôme trigonométrique $P(x)=\sin^3 x \cos x$.

6 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe.

6.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

On appelle ainsi les nombres complexes solutions de l'équation $z^n - 1 = 0$. Ces nombres complexes ne peuvent être nuls. Essayons de les écrire sous forme exponentielle.

Pour que $z = re^{i\theta}$ *avec* $r > 0$ soit solution de l'équation proposée, il est nécessaire et suffisant que $r^n e^{in\theta} = 1 = 1^n e^{2ik\pi}$.

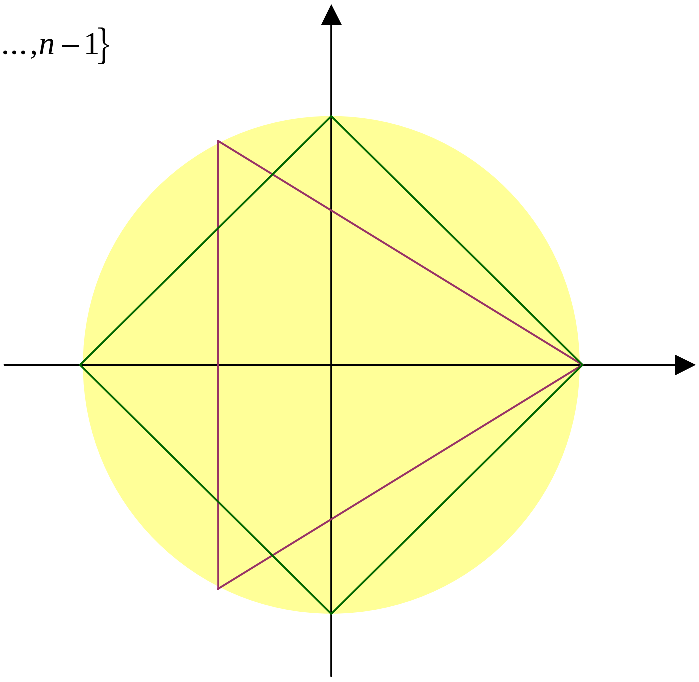
Soit

$$\begin{cases} r^n = 1^n \\ n\theta = 2k\pi \quad (k \in Z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathrm{Z}) \end{cases}$$

Par conséquent, l'équation $z^n - 1 = 0$ admet n racines distinctes, toutes de modules 1, et d'argument

$\theta_k = \dfrac{2k\pi}{n}$ *avec* $k \in \{0,1,\ldots..,n-1\}$

Les images des solutions sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle de rayon unité centré en O.



Exemple

Les racines de $z^5 = 1$ sont de la forme $z = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$ c'est-à-dire

- $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$

6.2 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul.

On appelle ainsi les nombres complexes solutions de l'équation $z^n - A = 0$ *où* $A \in \mathrm{C}^*$

Posons $A = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$ *et* $\alpha \in R$, la condition nécessaire et suffisante pour que $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ soit solution de l'équation proposée est que :

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \ (k \in \mathrm{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} (k \in \mathrm{Z}) \end{cases}$$

Il y a donc n racines distinctes, de la forme

$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ *avec* $k \in \{0,1,\ldots.,n-1\}$.

Les images des solutions sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt[n]{\rho}$ centré en O.

Remarque

Remarquons que la connaissance d'une racine $n^{\text{ième}}$ de A permet de les obtenir toutes, en multipliant cette racine par les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

En effet si z_0 est une racine $n^{ième}$ de A (donc non nulle), alors $z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$

et $\frac{z}{z_0}$ est une racine $n^{ième}$ de l'unité.

Exemple

Soit à résoudre : $z^3 = -2\sqrt{2}i$.

On remarque que $i\sqrt{2}$ est solution. Les racines cubiques sont 1, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Les racines de l'équation sont donc : $i\sqrt{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$

6.3 Racines carrées d'un nombre complexe.

Soit Z un nombre complexe non nul, de la forme $Z = a+ib = \rho e^{i\alpha} \;\; avec \;\; \rho > 0$

Cherchons les solutions de l'équation $z^2 - Z = 0$.
La méthode géométrique précédente fournit deux solutions

$$z_0 = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \;\; et \;\; z_1 = \sqrt{\rho}\, e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}}\, e^{i\pi} = -\sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = -z_0$$

Ces deux nombres complexes opposés sont appelées les racines carrées de Z.
Pour trouver ces deux solutions on peut aussi utiliser une méthode algébrique: on cherche z sous la forme $x+iy$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow (x+iy)^2 = a+ib \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Ce système de deux équations à deux inconnues se résout par substitution mais présente l'inconvénient de conduire à une équation bicarrée. Le système se résout simplement en lui adjoignant une troisième équation traduisant l'égalité des modules

$$\left|z^2\right| = |Z| \;\; soit \;\; x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

On résout le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Exemple

Exercice (MATH06E06A)

Résoudre dans C l'équation $z^2 = -8 + 6i$.

En déduire les solutions de l'équation : $z^2 + (-3 + i)z + 4 - 3i = 0$.

7 Interprétation géométrique des nombres complexes.

Nous vous proposons à titre facultatif le paragraphe suivant qui ne pourra donner lieu à aucune question lors de l'examen.

Il reprend en partie certaines notions déjà abordées et présente une interprétation géométrique des nombres complexes.
Lisez-le pour votre culture générale.

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

L'application $\varphi:\ \mathrm{C} \to P$ qui, à tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in R^2$, associe le point M de P de coordonnées (x, y) est une bijection qui permet d'identifier C et P.
Le plan P est alors appelé le plan complexe.

Pour tout $z \in C$, le point M est l'image de z dans P et z est l'affixe de M.

Avec les notations précédentes, si z_1 est l'affixe de M_1 et z_2 est l'affixe de M_2, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est $(z_2 - z_1)$, On a $M_1M_2 = \left| z_2 - z_1 \right|$, et

$$\left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{MM_2}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{MM_1}\right) = arg(z_2 - z) - arg(z_1 - z) = arg\,\frac{z_2 - z}{z_1 - z},\ [2\pi]$$

En résumé :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}\right) = arg\,\frac{z_2 - z}{z_1 - z} \quad [2\pi]}$$

Si $A(a), B(b), C(c)$ *et* $D(d)$ sont quatre points de P tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ alors

$$\boxed{\begin{array}{l} (AB)//(CD) \Leftrightarrow arg\dfrac{d-c}{b-a}=0 \quad [\pi] \\ (AB)\perp(CD) \Leftrightarrow arg\dfrac{d-c}{b-a}=\dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \end{array}}$$

Exemple

On considère les complexes : $a=-1+i,\ b=-1-i,\ c=2i,\ d=2-2i$

Calculons $\dfrac{c-a}{d-a}$ *et* $\dfrac{c-b}{d-b}$.

$$\frac{c-a}{d-a}=\frac{2i+1-i}{2-2i+1-i}=\frac{1+i}{3-3i}=\frac{1}{3}\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{1}{3}i$$

$$\frac{c-b}{d-b}=\frac{2i+1+i}{2-2i+1+i}=\frac{1+3i}{3-i}=\frac{(1+3i)(3+i)}{10}=i$$

Interprétation géométrique.

On pose $A(a), B(b), C(c)$ *et* $D(d)$

On peut dire que $(DA)\perp(CA)$ *car* $arg\dfrac{d-c}{b-a}=\dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$

De même, $(DB)\perp(CB)$ *car* $arg\dfrac{c-b}{d-b}=\dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$

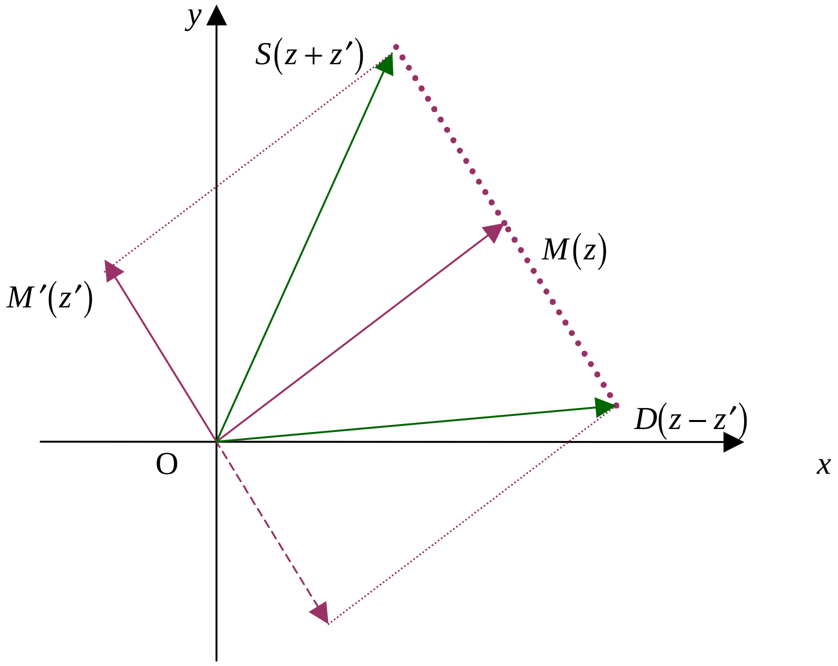
Les point A et B sont sur le cercle de diamètre $[DC]$

Vous pourrez en exercice, placer les points dans le plan et vérifier.

Le centre de ce cercle est $\Omega(1)$ et son rayon $\dfrac{1}{2}DC=\sqrt{5}$

7.1 Interprétation géométrique de l'addition dans C.

Soient z *et* z' deux nombres complexes.
Soient les points $M(z)$, $M'(z')$, $S(z+z')$ *et* $D(z-z')$



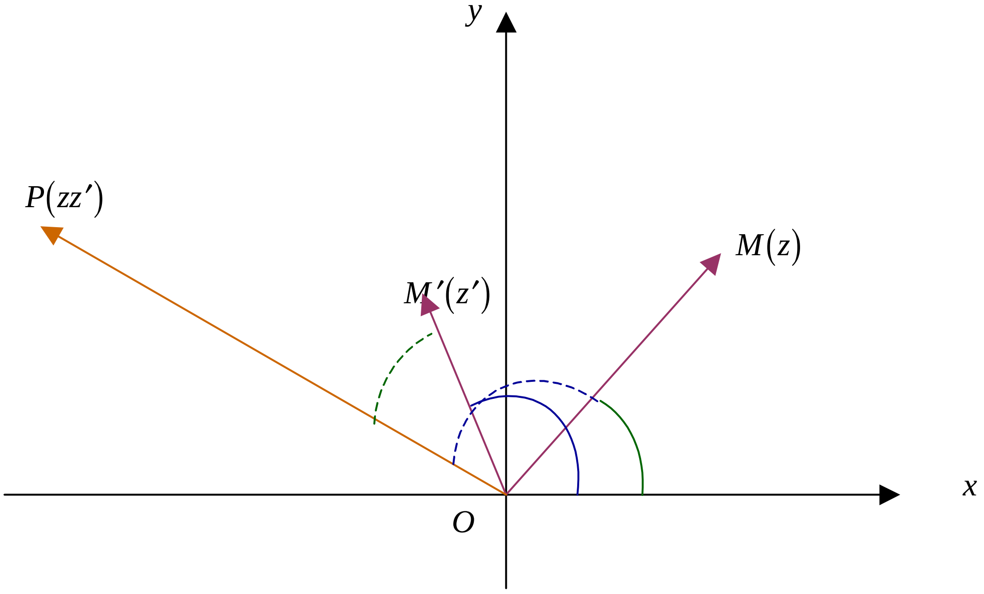
On a : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ *et* $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MM'}$

En particulier : $\left\|\overrightarrow{M\,M'}\right\| = |z'-z|$

7.2 Interprétation géométrique de la multiplication dans C.

Soient z *et* z' deux nombres complexes non nuls.
Posons $\rho = |z|$, $\rho' = |z'|$ *et* $\theta = arg(z) \quad (2\pi)$ *et* $\theta' = arg(z') \quad (2\pi)$
Soient les points $M(z), M'(z')$, *et* $P(zz')$

On a : $|zz'| = |z||z'| = \rho\rho'$ et $arg(zz') = arg(z) + arg(z') = \theta + \theta' \quad (2\pi)$



On passe de M' à P par la similitude directe de centre O, de rapport $|z|$ et d'angle $arg(z)$

On passe de M à P par la similitude directe de centre O, de rapport $|z'|$ et d'angle $arg(z')$

7.3 Condition nécessaire et suffisante d'alignement de trois points.

Soient $M_1, M_2, et\ M_3$, trois points de P deux à deux distincts. Pour que M_1, M_2, M_3 soient alignés, il faut et il suffit que $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ soient colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel λ tel que $z_3 - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$.

Ainsi M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in R$.

7.4 Condition nécessaire et suffisante de cocyclicité d'alignement de quatre points.

Soient $M_1, M_2, M_3\ et\ M_4$ quatre points de P deux à deux distincts.
Pour que M_1, M_2, M_3, M_4 soient cocycliques ou alignés il faut et il suffit que

$$\left(\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4}\right) = \left(\overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_2M_4}\right) \quad (\pi)$$

c'est-à-dire : $arg\dfrac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1} = arg\dfrac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} \qquad (\pi)$

Ainsi M_1, M_2, M_3, M_4 sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1} : \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} \in R$$

Exercice (MATH06E07)

Démontrer que si les nombres complexes z_1 et z_2 ont pour module 1, le nombre $z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est réel.

Exercice (MATH06E08)

Montrer que tout nombre complexe de module 1 (avec $z \neq -1$) peut se mettre sous la forme $z = \dfrac{1+ia}{1-ia}$ avec $a \in R$

Exercice (MATH06E09)

Montrer que $cos^2 \dfrac{\pi}{14} + cos^2\left(\dfrac{3\pi}{14}\right) + cos^2\left(\dfrac{5\pi}{14}\right) = \dfrac{7}{4}$

Exercice (MATH06E10)

Soit $f(z) = z^4 - 8z^3 + 27z^2 - 38z + 26$

- Calculer $f(1+i)$ et $f(1-i)$.
- Déterminer l'ensemble des solutions de $f(z) = 0$

Exercice (MATH06E11)

Résoudre dans C l'équation : $\left(3z^2 + z + 1\right)^2 + \left(z^2 + 2z + 2\right)^2 = 0$

Exercice (MATH06E12)

Soit $n \in \mathrm{N} - \{0,1\}$.Calculer le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

Exercice (MATH06E13)

Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $z = 28 - 96i$

Exercice (MATH06S01)

1. Calculer $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ *et* $z_2 = 1 - i$ sous forme trigonométrique

2. Donner le module et l'argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ en déduire : $cos\dfrac{\pi}{12}$ *et* $sin\dfrac{\pi}{12}$.

3. En déduire $cos\dfrac{7\pi}{12}$ *et* $tan\dfrac{11\pi}{12}$

Exercice (MATH06S02)

On pose, pour $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ $\quad Z = \dfrac{1+z}{1-z}$

1. Montrer que si $|z| = 1$, alors Z est imaginaire pur.

2. Résoudre dans C l'équation : $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^3 + \left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^3 = 2$

Solution (MATH06E07)

Quelques rappels du cours :

- $Z \in R \Leftrightarrow Z = \overline{Z}$
- $|Z| = 1 \Leftrightarrow Z\overline{Z} = 1$

Supposons que $z_1 \; et \; z_2$ ont pour module 1.

On a donc : $z_1\overline{z_1} = 1 \; et \; z_2\overline{z_2} = 1$

On va évaluer $z - \overline{z}$

$$z - \overline{z} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} - \overline{\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} - \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2}}$$

$$= \frac{z_1 + z_2 + z_1\overline{z_1}\,\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} - \overline{z_1} - \overline{z_2} - z_1 z_2\overline{z_1} - z_1 z_2\overline{z_2}}{(1 + z_1 z_2)(1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2})} = 0$$

Ce qui prouve que z est réel.

Retour

Solution (MATH06E08)

Considérons le complexe $z = x + iy$ avec $|z| = 1,\quad z \neq -1$

On rappelle que $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Pour montrer l'existence de $a \in R$ tel que $z = \frac{1+ia}{1-ia}$, on résout l'équation d'inconnue a

$$z = \frac{1+ia}{1-ia} \quad \Rightarrow \quad z(1-ia) = 1+ia \quad \Rightarrow \quad ia(1+z) = z-1$$

Comme $z \neq -1$ on a

$$a = \frac{i(1-z)}{1+z} = \frac{i(1-x-iy)}{1+x+iy} = \frac{i(1-x-iy)}{1+x+iy} \times \frac{(1+x-iy)}{1+x-iy}$$
$$= \frac{1+x-iy-x-x^2+ixy-iy-ixy-y^2}{(1+x)^2+y^2}$$

comme $x^2 + y^2 = 1$, on a : $a = i\frac{-2iy}{2+2x} = \frac{y}{1+x}$ qui est bien un réel.

Retour

Solution (MATH06E09)

On utilise la relation trigonométrique $cos^2 a = \frac{1+cos\,2a}{2}$

$$S = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(cos\frac{\pi}{7} + cos\frac{3\pi}{7} + cos\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{3}{2} + Re\left(e^{i\frac{\pi}{7}} + e^{i\frac{3\pi}{7}} + e^{i\frac{5\pi}{7}}\right)$$

$$S = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}Re\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}}\right)\right)$$

On rappelle la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$

$$1 + q + q^2 = \frac{1-q^3}{1-q}$$

Soit avec $q = e^{i\frac{2\pi}{7}} \neq 1$

$$S = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}Re\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\frac{1-e^{i\frac{6\pi}{7}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{7}}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}Re\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\frac{e^{i\frac{3\pi}{7}}}{e^{i\frac{\pi}{7}}} \times \frac{e^{-i\frac{3\pi}{7}} - e^{i\frac{3\pi}{7}}}{e^{-i\frac{\pi}{7}} - e^{i\frac{\pi}{7}}}\right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}Re\left(e^{i\frac{3\pi}{7}} \times \frac{-2i\,sin\frac{3\pi}{7}}{-2i\,sin\frac{\pi}{7}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}Re\left(e^{i\frac{3\pi}{7}} \times \frac{sin\frac{3\pi}{7}}{sin\frac{\pi}{7}}\right)$$

$$S = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{sin\frac{3\pi}{7}cos\frac{3\pi}{7}}{sin\frac{\pi}{7}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\frac{sin\frac{6\pi}{7}}{sin\frac{\pi}{7}}$$

Comme $sin(\pi - x) = sin\,x$, on a $sin\frac{6\pi}{7} = sin\frac{\pi}{7}$

et donc $S = cos^2\frac{\pi}{14} + cos^2\frac{3\pi}{14} + cos^2\frac{5\pi}{14} = \frac{7}{4}$

Retour

Solution (MATH06E10)

$f(z) = z^4 - 8z^3 + 27z^2 - 38z + 26$

$$f(1+i) = (1+i)^4 - 8(1+i)^3 + 27(1+i)^2 - 38(1+i) + 26$$
$$= -4 - 8(-2+2i) + 27(2i) - 38i - 38 + 26 = 0$$

$$f(1-i) = (1-i)^4 - 8(1-i)^3 + 27(1-i)^2 - 38(1-i) + 26$$
$$= -4 - 8(-2-2i) + 27(-2i) - 38i + 38 + 26 = 0$$

$z = 1+i$ *et* $z = 1-i$ sont racines. On peut donc mettre $(z-1-i)(z-1+i) = (z^2 - 2z + 2)$ en facteurs

On trouve en divisant $f(z)$ par $z^2 - 2z + 2$ ou par identification

$f(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 6z + 13)$

On résout $z^2 - 6z + 13 = 0$, avec $\Delta = 36 - 52 = -16 = (4i)^2$, donc deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{6-4i}{2} = 3 - 2i$ *et* $z_2 = 3 + 2i$

et l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est $\{1+i ; 1-i ; 3+2i ; 3-2i\}$

Retour

Solution **(MATH06E11)**

On utilise l'identité remarquable dans C

$$A^2 + B^2 = A^2 - (iB)^2 = (A + iB)(A - iB)$$

On applique cette formule au problème posé :

$$\left(3z^2 + z + 1\right)^2 + \left(z^2 + 2z + 2\right)^2 = \left(\left(3z^2 + z + 1\right) + \left(z^2 + 2z + 2\right)i\right)\left(\left(3z^2 + z + 1\right) - \left(z^2 + 2z + 2\right)i\right)$$

$$\left((3+i)z^2 + (1+2i)z + 1 + 2i\right)\left((3-i)z^2 + (1-2i)z + 1 - 2i\right)$$

L'équation proposée est équivalente au système suivant :

$$\left|\begin{array}{l} (3+i)z^2 + (1+2i)z + 1 + 2i = 0 \\ ou \\ (3-i)z^2 + (1-2i)z + 1 - 2i = 0 \end{array}\right.$$

La résolution de ces deux équations du second degré fournit les solutions

$$\left\{ i, -i, \frac{-1-i}{2}, \frac{-1+i}{2} \right\}$$

Retour

Solution (MATH06E12)

On doit calculer $\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

On utilise la relation fonctionnelle $e^a\, e^b = e^{a+b}$

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} = e^{i\frac{2\pi(n-1)n}{2n}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

Retour

Solution (MATH06E13)

On commence par chercher une solution de l'équation $z^4 = 28 - 96i$

On pose $Z = z^2$, d'où $Z^2 = 28 - 96i$

Soit

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 = 28 \\ 2XY = -96 \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{28^2 + 96^2} = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - Y^2 = 28 & (I) \\ 2XY = -96 & (II) \\ 2X^2 = 128 & (I + III) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} X = 8 \text{ et } Y = -6 \\ ou \\ X = -8 \text{ et } Y = 6 \end{array} \right.$$

On choisit arbitrairement l'une des deux solutions $Z = 8 - 6i$

On cherche maintenant l'une des solutions de l'équation $z^2 = 8 - 6i$

Soit avec la même méthode :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \\ 2x^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 3 \text{ et } y = -1 \\ ou \\ x = -3 \text{ et } y = 1 \end{array} \right.$$

On choisit arbitrairement l'une des deux solutions soit $z = 3 - i$

Ainsi, l'une des solutions est $z = 3 - i$. On obtient toutes les solutions en multipliant l'une d'entre elles par les racines quatrièmes de l'unité, donc par 1, par -1, par i, par $-i$

Les racines quatrièmes de $28 - 96i$ sont $\{3 - i; -3 + i; 1 + 3i; -1 - 3i\}$

Retour

Exercice (MATH06E01B)

On considère le polynôme complexe : $z^3+(1+i)z^2+(1+i)z+i$

1) Montrer que ce polynôme admet une racine imaginaire pure.
2) Factoriser ce polynôme et résoudre : $z^3+(1+i)z^2+(1+i)z+i=0$

Exercice MATH06E02B

On considère deux nombres complexes $z = -2 + i$ et $z' = 3 - 4i$

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants:

1) $z + z'$, 2) $5z - 3z'$, 3) z^2 , 4) $z^2 z'$, 5) $\frac{1}{z'}$

Exercice MATH06E02C

Mettre sous forme algébrique

1) $\dfrac{1+2i}{1-2i}$ 2) $\dfrac{1}{(1+2i)(3-i)}$ 3) $\dfrac{-2}{1-i\sqrt{3}}$ 4) $\left(\dfrac{19+7i}{9-i}\right)^3+\left(\dfrac{20+5i}{7+6i}\right)^3$

Exercice (MATH05E03B)

Trouver le module et l'argument du nombre complexe :

$z = 1 + i\tan\varphi$ *avec* $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis avec $\varphi \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice (MATH06E03C)

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}, \qquad z_2 = -\sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}.$$

Exercice (MATH06E04B)*

On pose $z = 1 + i$

1) Calculer z^2, z^3, z^4.

2) Soit *n* un entier supérieur ou égal à 1. En écrivant *n* sous la forme $4k+p$ avec *k* et *p* entiers et $0 \leq p < 4$, démontrer que $z^n = (-4)^k z^p$. Calculer z^{25}

3) Calculer $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{24}$.

Exercice MATH06E06B

Résoudre dans C l'équation : $z^3+(1+6i)z^2+(-13+6i)z-9-12i=0$ sachant que l'une des solutions est imaginaire pure.

Exercice (MATH06E06C)

Soit $n \in N - \{0;1\}$

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $(z+i)^n = (z-i)^n$

Solution MATH06E01A

1) On considère le polynôme complexe : $z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i$

Montrons que ce polynôme admet une racine imaginaire pure bi.

$$(bi)^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)(bi)^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)(bi)-8i=b^3i^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)b^2i^2+4bi-4b\sqrt{3}-8i$$

$$=-b^3i-2\left(\sqrt{3}+i\right)b^2i^2+4bi+4b\sqrt{3}-8i=-b^3i+2\left(\sqrt{3}+i\right)b^2+4bi-4b\sqrt{3}-8i$$

$$=2b^2\sqrt{3}-4b\sqrt{3}+\left(-b^3+2b^2+4b-8\right)i$$

Un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

$$\begin{cases}2b^2\sqrt{3}-4b\sqrt{3}=0\\-b^3+2b^2+4b-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b\sqrt{3}\left(b-2\right)=0\\-b^3+2b^2+4b-8=0\end{cases}\Rightarrow b=2$$

Le complexe $2i$ est donc racine du polynôme. On peut donc factoriser $\left(z-2i\right)$.

2) effectuons la division dans l'ensemble des polynômes complexes.

$$\begin{array}{l|l}
z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i & z-2i \\
\hline
-\left(z^3-2iz^2\right) & z^2-2\sqrt{3}z+4 \\
\quad -2\sqrt{3}z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i & \\
\quad -\left(-2\sqrt{3}z^2+4i\sqrt{3}z\right) & \\
\qquad\qquad 4z-8i & \\
\qquad\qquad -\left(4z-8i\right) & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Vous remarquerez cette technique pratique que vous utilisiez sans doute déjà dans R et qui permet de minimiser les erreurs de calcul et surtout qui est bien plus simple que la technique d'identification classique.

Donc $z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i=\left(z-2i\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$

Résolvons : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$, le discriminant vaut $\Delta = 12 - 16 = -4 = 4i^2$. Les deux racines complexes conjuguées sont donc : $z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$ *et* $z_2 = \sqrt{3} + i$

Les racines sont donc : $2i$, $\sqrt{3} - i$ *et* $\sqrt{3} + i$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution **(MATH06E01B)**

Montrons que ce polynôme admet une racine imaginaire pure bi.

$$(bi)^3+(1+i)(bi)^2+(1+i)(bi)+i=-b^3i-b^2-b^2i+bi-b+i=-b-b^2+\left(-b^3-b^2+b+1\right)i$$
$$=-b(b+1)+\left(-b^3-b^2+b+1\right)i$$

Ce polynôme est nul si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont nulles ce qui donne la solution unique $b=-1$. Le complexe $z_0=-i$ est donc racine du polynôme. Peut être aurait t'on pu deviner cette solution évidente. On peut donc factoriser $z+i$.

On obtient : $z^3+(1+i)z^2+(1+i)z+i=(z+i)\left(z^2+z+1\right)$

Il ne reste plus qu'à résoudre $z^2+z+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ *et* $z_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

Les racines sont donc : $-i, \quad z_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ *et* $z_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E02A)

On multiplie le numérateur et le dénominateur du nombre complexe $z=\dfrac{a+ib}{c+id}$ par le nombre complexe conjugué du dénominateur, c'est-à-dire $c-id$ $(avec\ c-id\neq 0)$

$$\frac{1+3i}{2+5i}=\frac{(1+3i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\frac{2+6i-5i+15}{4+25}=\frac{17}{29}+\frac{1}{29}i$$

$$\frac{3-2i}{4-i}=\frac{(3-2i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}=\frac{14}{17}-\frac{5}{17}i$$

$$\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH06E02B)

$z = -2 + i$ et $z' = 3 - 4i$

1) $z + z' = -2 + i + 3 - 4i = 1 - 3i$

2) $5z - 3z' = 5(-2 + i) - 3(3 - 4i) = -19 + 17i$

3) $z^2 = (-2 + i)^2 = 4 - 1 - 4i = 3 - 4i$

4) $z^2 \; z' = (3 - 4i)(3 - 4i) = 9 + 16i^2 - 24i = -7 - 24i$

5) $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{3 - 4i} = \dfrac{1}{3 - 4i} \times \dfrac{3 + 4i}{3 + 4i} = \dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25} i$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH06E02C)

1) $\frac{1+2i}{1-2i}$ 2) $\frac{1}{(1+2i)(3-i)}$ 3) $\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}$ 4)

1) $\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{1+2i}{1-2i}\times\frac{1+2i}{1+2i}=\frac{1-4+4i}{1+4}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

2) $\frac{1}{(1+2i)(3-i)}=\frac{1}{5+5i}=\frac{1}{5+5i}\times\frac{5-5i}{5-5i}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}i$

3) $\frac{-2}{(1-i\sqrt{3})}=\frac{-2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

4) $\left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^3+\left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^3=\left(\frac{19+7i}{9-i}\times\frac{9+i}{9+i}\right)^3+\left(\frac{20+5i}{7+6i}\times\frac{7-6i}{7-6i}\right)^3$

$=\left(\frac{164+82i}{82}\right)^3+\left(\frac{170-85i}{85}\right)^3=(2+i)^3+(2-i)^3=(8+12i-6-i)+(8-12i-6+i)=4$

Dans le 4), vous remarquerez qu'il est plus simple de calculer la forme algébrique à l'intérieur des parenthèses avant d'élever au cube.

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution **(MATH06E03A)**

Pour les cas simples, il n'est pas nécessaire de « dérouler » la méthode, on peut procéder comme suit :

- On écrit $z_1 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$

  Le module de z_1 est $|z_1| = 2\sqrt{2}$

  L'argument de z_1 est $arg\, z_1 = \frac{3\pi}{4}$ modulo 2π. Donc $z_1 = \left[2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

- On écrit $z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)$

  Le module de z_2 est $|z_2| = 2$

  L'argument de z_2 est $arg\, z_2 = \frac{2\pi}{3}$ modulo 2π. Donc $z_2 = \left[2; \frac{2\pi}{3}\right]$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH06E03B)

On écrit $z = 1 + i\,tan\,\varphi = 1 + i\dfrac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi} = \dfrac{cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi}{cos\,\varphi}$

- Si $\varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors $cos\,\varphi > 0$ et le module de z est $\dfrac{1}{cos\,\varphi}$ et son argument φ modulo 2π

- En revanche, si $\varphi \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ alors $cos\,\varphi < 0$ et l'on écrit

$$z = \frac{-(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)}{-cos\,\varphi} = \frac{cos(\pi+\varphi) + i\,sin(\pi+\varphi)}{-cos\,\varphi}$$

le module de z est $-\dfrac{1}{cos\,\varphi}$ et son argument $\pi + \varphi$ modulo 2π .

Remarque

Attention de ne pas commettre l'erreur courante de prendre comme module un nombre négatif !

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH06E03C)

- $z_1 = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$.

  Il faut se ramener à $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

  On utilise les relations trigonométriques $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \cos\varphi$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin\varphi$

  alors $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10} = e^{i\frac{3\pi}{10}}$

  Le module de z_1 est 1 et son argument $\frac{3\pi}{10}$ modulo 2π. Donc $z_1 = \left[1;\frac{3\pi}{10}\right]$

- $z_2 = -\sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$

  On utilise les relations trigonométriques $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\sin\varphi$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = \cos\varphi$

  alors $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{9\pi}{14} + i\sin\frac{9\pi}{14}$

  Le module de z_2 est 1 et son argument $\frac{9\pi}{14}$ modulo 2π. Donc $z_2 = \left[1;\frac{9\pi}{14}\right]$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E04A)

- $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$

$$1+i\sqrt{3} = \left[2;\frac{i\pi}{3}\right] \quad et \quad 1-i = \left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}};\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[\frac{2}{\sqrt{2}};\frac{7\pi}{12}\right]$$

$$z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30} = \left[\sqrt{2};\frac{7\pi}{12}\right]^{30} = \left[2^{15};\frac{35\pi}{2}\right] = \left[2^{15};-\frac{\pi}{2}\right] = -2^{15}i$$

- $z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}\right)^{30}$

$$\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{\left(1+\sqrt{2}+i\right)^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1} = \frac{1+2-1+2\sqrt{2}+2i+2i\sqrt{2}}{1+2+2\sqrt{2}+1} = \frac{2+2\sqrt{2}+\left(2+2\sqrt{2}\right)i}{\sqrt{2}\left(2+2\sqrt{2}\right)} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Finalement : $\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \left[1;\frac{\pi}{4}\right]$

Donc $z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}\right)^{30} = \left[1;\frac{\pi}{4}\right]^{30} = \left[1;\frac{15\pi}{2}\right] = \left[1;-\frac{\pi}{2}\right] = -i$

- $z_3 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^5 = \left[2;\frac{2\pi}{3}\right]^5$

(Vous pourrez regarder la solution de l'exercice MATH06E03A)

Donc $z_3 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^5 = \left[2;\frac{2\pi}{3}\right]^5 = \left[2^5;\frac{10\pi}{3}\right] = \left[32;\frac{4\pi}{3}\right] = 16\left(-1-\sqrt{3}i\right)$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution **(MATH06E04B)**

1) $z=\left[\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$ $\quad z^2=\left[2;\dfrac{2\pi}{4}\right]$ $\quad z^3=\left[2\sqrt{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$ $\quad z^4=\left[4;\dfrac{4\pi}{4}\right]=-4$

2) En posant $\quad n = 4k + p \quad$ *on a* $z^{4k+p}=\left(z^4\right)^k z^p=\left(-4\right)^k z^p$

$$z^{25}=\left(z^4\right)^6 z^1=\left(-4\right)^6 z^1=2^{12}\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]=\left[2^{12}\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]=2^{12}\left(1+i\right)$$

3) Calculons S.

$$S=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{24}=\frac{1-z^{25}}{1-z}=\frac{1-2^{12}z}{1-z}=\left(1-2^{12}\left(1+i\right)\right)\frac{1}{-i}=i\left(-2^{12}+1-2^{12}i\right)$$
$$=2^{12}+\left(1-2^{12}\right)i=4096-4095i$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E05A)

On utilise les formules d'Euler

$$P(x)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)=-\frac{1}{16}\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$$

$$P(x)=-\frac{1}{16i}\left(e^{4ix}-2e^{2ix}+2e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)=-\frac{1}{16i}\left(\left(e^{4ix}-e^{-4ix}\right)-2\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\right)$$

Or $e^{4ix}-e^{-4ix}=2i\,sin(4x)$ *et* $e^{2ix}-e^{-2ix}=2i\,sin(2x)$

$$P(x)=-\frac{1}{8}sin(4x)+\frac{1}{4}sin(2x).$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH06E06A)

On cherche le nombre complexe z sous la forme $z=\alpha+i\beta$ avec α *et* β réels.

On écrit

$$z^2=(\alpha+i\beta)^2=\alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta=-8+6i \qquad \text{(I)}$$

L'égalité des parties réelles et des parties imaginaires donne :

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=-8 & (1)\\ 2\alpha\beta=6 & (2)\end{cases}$$

Plutôt que de résoudre ce système qui conduit à une équation du quatrième degré bicarrée, on préfère ajouter une équation supplémentaire, en écrivant l'égalité des modules de l'équation (I),

$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{(-8)^2+(6)^2}=10 \qquad (3)$$

En effectuant la somme des équations (1) et (3), on tire

$$2\alpha^2=2 \quad \text{et} \quad \alpha^2=1$$

D'où deux solutions $\alpha_1=1$ *et* $\alpha_2=-1$

La relation (3) prouve que α *et* β sont de même signe et par conséquent

$$Si\ \ \alpha_1=1\ \ alors\ \ \beta_1=3\ \ et\ \ z_1=\alpha_1+i\beta_1=1+3i$$

$$Si\ \ \alpha_2=-1\ \ alors\ \ \beta_2=-3\ \ et\ \ z_2=\alpha_2+i\beta_2=-1-3i$$

et l'équation du second degré $z^2=-8+6i$ admet deux solutions opposées

$$z_1=1+3i\ \ et\ \ z_2=-1-3i=-z_1$$

Il n'est pas inutile de vérifier l'exactitude des résultats en calculant

$$(1+3i)^2=(-1-3i)^2=-8+6i$$

Le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=(-3+i)^2-4(4-3i)=-8+6i$

Cherchons un nombre complexe δ tel que $\delta^2=\Delta=-8+6i$

Il existe deux nombres complexes z_1 *et* $z_2=-z_1$ répondant à la question. On choisit arbitrairement l'un des deux nombres complexes, par exemple $\delta=z_1$.

Les racines de l'équation du second degré sont alors :

$$z'=\frac{-b+\delta}{2a}\ \ et\ \ z''=\frac{-b-\delta}{2a}$$

soit

$$z' = \frac{3-i+1+3i}{2} = 2+i \quad et \quad z'' = \frac{3-i-1-3i}{2} = 1-2i$$

Les solutions sont $\{2+i;1-2i\}$

Remarque

on prendra toujours soin de vérifier les relations $S = z' + z'' = -\dfrac{b}{a}$ *et* $P = z'z'' = \dfrac{c}{a}$

Dans cet exemple

$$S = (2+i)+(1-2i) = 3-i \;\; et \;\; P = (2+i)(1-2i) = 4-3i \,.$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution **(MATH06E06B)**

L'équation proposée possède une solution imaginaire pure.

Soit $z = ib$ avec $b \in R$ la solution imaginaire pure de l'équation.

$$(ib)^3 + (1+6i)(ib)^2 + (-13+6i)(ib) - 9 - 12i = 0$$

$$\left(-b^2 - 6b - 9\right) + \left(-b^3 - 6b^2 - 13b - 12\right)i = 0$$

Ce nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes les deux nulles.

$$\begin{cases} -b^3 - 6b^2 - 13b - 12 = 0 \\ -b^2 - 6b - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b^3 - 6b^2 - 13b - 12 = 0 \\ -(b+3)^2 = 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré $-b^2 - 6b - 9 = 0$ admet la racine double (cas très exceptionnel) $b = -3$;

La valeur $b = -3$ est solution de l'équation du troisième degré $-b^3 - 6b^2 - 13b - 12 = 0$

L'équation proposée admet donc la racine imaginaire pure $z = -3i$ et par conséquent, on peut mettre $(z+3i)$ en facteur dans $z^3 + (1+6i)z^2 + (-13+6i)z - 9 - 12i$

Ainsi $z^3 + (1+6i)z^2 + (-13+6i)z - 9 - 12i = (z+3i)\left(Az^2 + Bz + C\right)$

Par identification, on trouve $A = 1 \quad B = 1+3i \qquad C = -4+3i$

Pour résoudre l'équation du second degré $z^2 + (1+3i)z - 4 + 3i = 0$, on obtient successivement $\Delta = \delta^2 = 8 - 6i \quad donc \;\; \delta = 3 - i \;\; ou \;\; \delta = -3 + i$

et les racines de l'équation du second degré sont

$$z' = 1 - 2i \quad et \quad z'' = -2 - i$$

Les solutions de l'équation initiale sont $\{-3i\ ; 1-2i\ ;\ -2-i\}$.

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH06E06C)

Comme i n'est pas solution, posons $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$

$$(z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow Z^n = 1$$

Les solution de cette équation sont donc les racines $n^{ièmes}$ de l'unité.

$$Pour \quad Z \neq 1 \qquad Z = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow z = i\frac{Z+1}{Z-1}$$

Les solutions sont donc les z_k avec $k \in \{1,.....,n-1\}$ définis par

$$z_k = i\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1} = i\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}} = cotan\frac{k\pi}{n} \qquad k \in \{1,.....,n-1\}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Aide (MATH06E01A)

- On remplace z par bi et on cherche la valeur de b sachant qu'un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

- bi étant racine du polynôme on factorise $z - bi$ et on peut ensuite résoudre l'équation du second degré. Pour factoriser $z - bi$, la méthode la plus sure est la division euclidienne des polynômes. Nous verrons de façon théorique dans un prochain chapitre cette notion très simple à comprendre. Vous pouvez cependant vous reportez à la solution commentée qui présente cette méthode.

Retour

Aide (MATH06E01B)

Même méthode que dans l’exercice E01A.

Retour

Aide (MATH06E02A)

Pour se débarrasser des nombres complexes au dénominateur, on multiplie ceux-ci par leur nombre complexe conjugué afin d'obtenir au dénominateur un nombre réel, on utilise en fait la propriété : $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

Exemple : $\dfrac{2-i}{3-2i}=\dfrac{2-i}{3-2i}\times\dfrac{3+2i}{3+2i}=\dfrac{8+i}{13}=\dfrac{8}{13}+\dfrac{1}{13}i$

Retour

Aide (MATH06E02B)

- Dans les 4 premiers exemples, on utilise les propriétés sur les complexes développées au paragraphe 2 du cours.

- Dans le 5), pour « se débarrasser » du nombre complexe au dénominateur, on multiplie celui-ci par son nombre complexe conjugué afin d'obtenir au dénominateur un nombre réel, on utilise en fait la propriété : $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

  Exemple : $\dfrac{2-i}{3-2i}=\dfrac{2-i}{3-2i}\times\dfrac{3+2i}{3+2i}=\dfrac{8+i}{13}=\dfrac{8}{13}+\dfrac{1}{13}i$

Retour

Aide (MATH06E02C)

- Les trois premiers calculs font appel aux mêmes règles de calcul que pour les exercices précédents.

- Notez cependant qu'il est préférable dans le 4) de mettre sous forme algébrique l'intérieur des parenthèses et de calculer la puissance après cette simplification.

Retour

Aide (MATH06E03A)

On rappelle les formules du cours :

$z \neq 0$ *et* $z = a + bi = [r, \theta]$ *avec*

$$r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad et \quad \begin{cases} sin\,\theta = \dfrac{b}{r} \\ cos\,\theta = \dfrac{a}{r} \end{cases}$$

Cela permet en général de déterminer θ à $2k\pi$ s'il s'agit d'une valeur usuelle, sinon on se contentera d'une valeur approchée à $2k\pi$.

Retour

Aide (MATH06E03B)

Exercice classique et erreur classique : on met le complexe $z = a + bi$ sous la forme $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et on conclut hâtivement que le module est *r* et l'argument θ.

Ceci n'est vrai que si *r* est strictement positif.

Si *r* est négatif, il faut faire des transformations trigonométriques pour se ramener à un nombre positif. En général, $x+\pi,\ x-\pi,\ etc...$

Exemple

$$z = -2(\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)) = [2;\theta+\pi]$$
$$z' = -2(\cos\theta - i\sin\theta) = 2(\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)) = [2;\pi-\theta]$$

Retour

Aide (MATH06E03C)

Le complexe est sous la forme $z = r(sin\,\theta + i\,cos\,\theta)$, Il faut donc transformer le sinus en cosinus et le cosinus en sinus. Pour cela on utilise les formules

$$cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -sin\,x,\quad cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = sin\,x \quad etc...$$

Exemple

$$sin\frac{\pi}{11} - i\,cos\frac{\pi}{11} = cos\left(\frac{\pi}{11}-\frac{\pi}{2}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{11}-\frac{\pi}{2}\right) = \left[1;-\frac{9\pi}{22}\right]$$

Retour

Aide (MATH06E04A)

Il faut mettre le complexe sous forme trigonométrique afin de pouvoir utiliser la formule de MOIVRE.

En effet : $[r;\theta]^n = \left[r^n;n\theta\right]$.

Lorsqu'il s'agit de lignes trigonométriques connues et reconnaissables, on peut mettre le numérateur et le dénominateur sous forme trigonométrique et utiliser les propriétés : $\dfrac{[r;\theta]}{[r';\theta']} = \left[\dfrac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$.

$$\frac{1+i}{2-2i} = \frac{\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{1}{2};\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}i$$

Retour

Aide (MATH06E04B)

Exercice un peu plus théorique.

- Comme dans l'exercice précédent, Il faut mettre le complexe sous forme trigonométrique afin de pouvoir utiliser la formule de MOIVRE ($[r;\theta]^n = \left[r^n;n\theta\right]$). Les calculs doivent faire apparaître « une période » au niveau des résultats.

- Ensuite, il faut écrire $z^{4k+p} = \left(z^4\right)^k z^p$ et utiliser les résultats de la question 1)

- Pour la dernière question, il faut utiliser le résultat démontré dans le chapitre sur les suites géométriques : $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Retour

Aide (MATH06E05A)

Référez-vous à l'exemple similaire traité dans le cours.

Vous devez trouver : $sin^3 x \, cos\, x = -\frac{1}{8} sin(4x) + \frac{1}{4} sin(2x)$

Il est prudent, à la fin de l'exercice d'essayer quelques valeurs usuelles.

Retour

Aide (MATH06E06A)

On pose $z = \alpha + \beta i$

D'après la méthode du cours on doit résoudre : $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -8 \\ 2\alpha\beta = 6 \end{cases}$

Vous pourrez regarder la solution proposée qui utilise la technique du cours et comparer votre résultat obtenu en utilisant la méthode suivante :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -8 \\ 2\alpha\beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \left(-\beta^2\right) = -8 \\ \alpha\beta > 0 \\ \alpha^2\left(-\beta^2\right) = -9 \end{cases}$$

On est donc ainsi ramené à chercher deux nombres α^2 *et* $-\beta^2$ dont on connaît la somme et le produit donc solution de l'équation : $X^2 + 8X - 9 = 0$.

Rappelez-vous que $\alpha\beta > 0$

A vous de finir !

Retour

Aide (MATH06E06B)

- On remplace z par bi et on cherche la valeur de b sachant qu'un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

- bi étant racine du polynôme, on factorise $z - bi$ et on peut ensuite résoudre l'équation du second degré. On trouve un discriminant complexe, qu'il faut faire apparaître comme un carré.

Retour

Aide (MATH06E06C)

On pose $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$, on est ramené à résoudre : $Z^n = 1$ dont les solutions sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

On peut alors se référer au cours § 6.2

Retour