8-Primitives

1 Intégrales et primitives

1-1 Généralités

1-1-1 Définition

f étant définie sur un intervalle I de l'ensemble des nombres réels, une fonction F, définie sur I, est une primitive de f sur I si et seulement si

$$\begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I \quad F'(x) = f(x) \end{cases}$$

1-1-2 Théorèmes

Deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante. C'est-à-dire que, si F est une primitive de f sur I, alors toute primitive de f sur I est de la forme :

$$x \mapsto F(x) + C$$

où C est une constante réelle.

Si f est continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur cet intervalle et pour tout a de l'intervalle I la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Rappel : La fonction logarithme, définie sur l'ensemble des réels strictement positifs, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

$$\ln : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}dt \quad \text{donc} \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

on a donc par définition :

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

On note $\int f(x)dx$ l'une quelconque des primitives de f

Pour toute primitive F de f sur I, contenant a, on a :

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Le calcul d'intégrales des fonctions continues se ramène donc à la recherche de primitives.

1-1-3 Propriété de linéarité

Soient α et β deux réels, f et g deux fonctions réelles admettant des primitives F et G sur un intervalle I de l'ensemble des réels alors :
$\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I
et on écrit :

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Exemple :

$$\begin{aligned} P(x) &= \int \left(3x^2 - 5\sin x + 2x\right)dx = 3\int x^2 dx - 5\int \sin x dx + 2\int x dx \\ &= x^3 + 5\cos x + x^2 + C \end{aligned}$$

C étant une constante réelle

1-2 Primitives usuelles

f(t)	I Intervalle de validité	Une primitive de f sur I
0	R	k
a	R	at
$t^r \ , r \in Q - \{-1\}$	si r<0 alors R^{+*} si r>0 alors R	$\frac{t^{r+1}}{r+1}$
$\cos t$	R	$\sin t$
$\sin t$	R	$-\cos t$
$\frac{1}{t}$	R^{+*} ou R^{-*}	$\ln\lvert t\rvert$
e^t	R	e^t
$\tan t$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, \ k \in Z$	$-\ln\lvert\cos t\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$]-1;1[$	$\operatorname{Arc}\sin t$
$1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, \ k \in Z$	$\tan t$
$\operatorname{sh} t$	R	$\operatorname{ch} t$
$\operatorname{ch} t$	R	$\operatorname{sh} t$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = 1 - \operatorname{th}^2 t$	R	$\operatorname{th} t$
$\frac{1}{1+t^2}$	R	$\operatorname{Arctan} t$
$\frac{1}{a^2+t^2}$	R	$\frac{1}{a}\operatorname{Arc}\tan\frac{t}{a}$
$\frac{1}{a^2-t^2}$	$]-\infty ; a[$ ou $]-a ; a[$ ou $]a ; +\infty[$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+t}{a-t}\right\rvert$

Exemple :

$$P_1(x) = \int (x-2)^2 dx = \frac{1}{3}(x-2)^3 + C_1$$

$$P_2(x) = \int (2x-1)^2 dx = \frac{1}{6}(2x-1)^3 + C_2$$

$$P_3(x) = \int (3x^2+1)^2 dx = \int (9x^4+6x^2+1)dx = \frac{9}{5}x^5 + 2x^3 + x + C_3$$

C_1, C_2, et C_3 sont des constantes réelles.

Exercice **(MATH08E01A)**

Donner les intervalles d'existence et calculer les primitives suivantes :

$$P_1(x) = \int (x + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$$

$$P_2(x) = \int (\sqrt{x}+1)^2 dx$$

$$P_3(x) = \int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

$$P_4(x) = \int \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx$$

2 Méthodes de calcul

2-1 Intégration par parties

2-1-1 Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur un intervalle I de l'ensemble des réels, et deux réels a et b de I. On a alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Et pour la notation des primitives adoptée :

$$\int u(t)v'(t)dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)dt$$

2-1-2 Exemples d'utilisation

- *Produit d'une fonction polynôme et d'une fonction dont on connaît une primitive.*

L'idée est de baisser le degré du polynôme par des intégrations par parties successives en posant u la fonction polynôme

Exemple :

$F(x) = \int x \cos x \, dx$

En posant :

$u = x \qquad u' = 1$

$v = \sin x \qquad v' = \cos x$

$F(x) = x \sin x - \int 1 \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$

C étant une constante réelle

- *Produit d'une fonction polynôme par une fonction logarithme, une fonction trigonométrique réciproque ou d'une fonction hyperbolique réciproque.*

On pose u la fonction logarithme, la fonction trigonométrique réciproque ou la fonction hyperbolique réciproque

Résultat classique :

Sur tout intervalle I de l'ensemble des réels strictement positifs :

$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

C étant une constante réelle

Exemples :

- Calculons :

$I = \int_4^5 \ln(x^2 - 4x + 3) dx = \int_4^5 \ln((x-3)(x-1)) dx$

Cette intégrale est bien définie car :

$x - 3 > 0$ et $x - 1 > 0$ sur $[4;5]$ donc $(x-3)(x-1) > 0$

$I = \int_4^5 \ln(x^2 - 4x + 3) dx = \int_4^5 \ln(x-3) dx + \int_4^5 \ln(x-1) dx$

on pose $t = x - 3$ puis $t = x - 1$

$dt = dx$

En effectuant le changement de variables et en modifiant les bornes,

comme $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$ (C constante réelle)

On a $I = [t(\ln t - 1)]_1^2 + [t(\ln t - 1)]_3^4 = 10\ln 2 - 3\ln 3 - 2$

- Calculons :

$$I = \int_0^1 \ln(1 + x^2)\,dx$$

Effectuons une intégration par parties, en posant :

$u = \ln(1 + x^2) \qquad u' = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

$v = x \qquad v' = 1$

$$I = \left[x\ln(1 + x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2}dx$$

$$\frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} = 1 - \frac{1}{1 + x^2}$$

$$I = \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)dx = \ln 2 - 2\left[x - \operatorname{Arc}\tan x\right]_0^1$$

$$I = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

Exercice **(MATH08E02A)**

Calculer :

$$I = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\,dx$$

$$J = \int_1^e \ln^2 x\,dx$$

2-1-3 Cas particuliers :

Dans les exemples qui suivent, on peut intégrer par parties, mais il est plus simple de supposer à priori, la forme du résultat.

- *Primitives de la forme :*

$\int (A\cos px + B\sin px)e^{kx}dx$ où A, B, k et p sont des nombres réels

On cherche des primitives de la forme

$F(x) = (\lambda\cos px + \mu\sin px)e^{kx} + C$

On dérive et on identifie.

Exemple :

Calculer une primitive P de : $x \mapsto \int (2\cos 3x - 5\sin 3x)e^{-2x}dx$

On peut intégrer successivement deux fois par parties mais il est plus simple de poser à priori le résultat sous la forme suivante :

$$P(x)=\int(2\cos 3x-5\sin 3x)e^{-2x}\,dx=(\lambda\cos 3x+\mu\sin 3x)e^{-2x}+C$$

En dérivant on obtient :

$$(2\cos 3x-5\sin 3x)e^{-2x}=\left[(-2\lambda+3\mu)\cos 3x+(-3\lambda-2\mu)\sin 3x\right]e^{-2x}$$

d'où le système :

$$\begin{cases}-2\lambda+3\mu=2\\-3\lambda-2\mu=-5\end{cases}$$

$$\text{d'où}\quad \lambda=\frac{11}{13}\quad\text{et}\quad \mu=\frac{16}{13}$$

Finalement :

$$P(x)=\int(2\cos 3x-5\sin 3x)e^{-2x}\,dx=\left(\frac{11}{13}\cos 3x+\frac{16}{13}\sin 3x\right)e^{-2x}+C$$

C étant une constante réelle.

Exercice **(MATH08E03A)**

Calculer une primitive P de :

$$x\mapsto\int\cos 3x\,e^{-4x}\,dx$$

- *Primitives de la forme :*

$$\int P_n(x)e^{kx}\,dx$$

Le polynôme P_n est de degré n et k est un nombre réel
Les primitives sont de la forme :

$$F(x)=Q_n(x)e^{kx}+C$$

Le polynôme Q_n est de degré n. On détermine ses coefficients en dérivant F et en identifiant avec l'expression de départ.

Exemple :

On calcule une primitive P de :

$$x\mapsto\int x^3e^{-x}\,dx$$

On peut intégrer successivement trois fois par parties mais il est plus simple de poser à priori le résultat sous la forme suivante :

$$P(x)=\int x^3e^{-x}\,dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}+C$$

En dérivant, on obtient pour tout x :

$$x^3e^{-x}=-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c-d$$

En identifiant les coefficients de même degré :

$$\begin{cases} -a=1 \\ 3a-b=0 \\ 2b-c=0 \\ c-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \\ c=-6 \\ d=-6 \end{cases}$$

Finalement :

$$P(x)=\int x^3e^{-x}\,dx=-(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+C$$

C étant une constante réelle.

2-2 Intégration par changement de variable

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. f admet sur cet intervalle des primitives. Soit F une de celles-ci.

$$J=\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$$

Soit u une fonction continue sur $[\alpha;\beta]$ à valeurs dans $[a\,;b]$ avec

$a=u(\alpha)$ et $b=u(\beta)$

Alors :

$$J=\int_a^b f(x)dx=F(u(\alpha))-F(u(\beta))=[F(u(x))]_\alpha^\beta$$

On peut remarquer que Fou est bien définie.

Supposons maintenant u dérivable et à dérivée continue, alors Fou est dérivable et $(F\circ u)'=u'\times(f\circ u)$. Dans ce cas la formule ci-dessus

s'écrit : $J=\int_a^b f(x)dx=[F(u(x))]_\alpha^\beta=\int_\alpha^\beta u'(t)f(u(t))dt$

Cette formule s'appelle **formule de changement de variable**.

On retiendra :

Pour effectuer le changement de variable x=u(t)
On remplace x par u(t)
On remplace l'élément différentiel dx par u'(t)dt
On change les bornes

Exemple :

Calculons $I=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$

On effectue le changement de variable

$t=\sqrt{e^x-1}$ ou $e^x=1+t^2$

En différentiant :

$e^x dx=2tdt$

si x = 0 alors t = 0

si x = ln 2 alors t = 1

$$I=\int_0^1\frac{2t^2dt}{1+t^2}=\int_0^1\frac{2\left(t^2+1-1\right)dt}{1+t^2}=2\int_0^1 dt-2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$$

$$I=2\left[t-\operatorname{Arc}\tan t\right]_0^1=2-\frac{\pi}{2}$$

Exercice **(MATH08E04A)**

Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1=\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

$$I_2=\int_1^2\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$$

2-3 Intégration des fractions rationnelles

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples dans R(X) :

Toute fraction rationnelle est la somme de sa partie entière (polynôme dont on connaît les primitives), et des éléments simples de première et de seconde espèce.

- *Primitivation des éléments simples de première espèce*

Sur un intervalle ne contenant pas a, on a

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\left|\begin{array}{ll}\dfrac{1}{(1-n)}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}}+C & \text{si } n\neq 1\\ \ln|x-a|+C & \text{si } n=1\end{array}\right.$$

Où C est une constante réelle.

Exemple :

Calculons :

- $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx$

On considère la fonction $t\mapsto\sqrt[5]{t}$, dérivable de dérivée strictement positive sur $[0;1]$. Elle réalise une bijection.

On effectue le changement de variable $x^5=t$ d'où $5x^4dx=dt$

si x = 0 alors t = 0
si x = 1 alors t = 1

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{t\,dt}{(1+t)^3}$$

Décomposons en éléments simples

$$\frac{t}{(1+t)^3} = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3}$$

$$I_1 = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{40}$$

- $$I_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$I_2 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$$

- *Primitivation des éléments simples de seconde espèce*

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^\beta}dx + (N - \frac{pM}{2})\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\beta}dx$$

La première primitive se calcule en utilisant le changement de variable $u = x^2 + px + q$.

En écrivant sous forme canonique le trinôme $x^2 + px + q$, le calcul de la deuxième primitive se ramène, après changement de variable à $I_\beta(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^\beta}$ que l'on intègre de la manière suivante:

$$I_\beta(t) = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^\beta}dt - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^\beta}dt = \int \frac{1}{(1+t^2)^{\beta-1}}dt - \int \frac{t.t}{(1+t^2)^\beta}dt$$

Le dernier terme s’intègre par parties

$u = t \qquad u' = 1$

$v' = \dfrac{t}{(1+t^2)^\beta} \qquad v = \dfrac{1}{2(1-\beta)(1+t^2)^{\beta-1}}$

et $$\int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^\beta} = \frac{t}{2(1-\beta)(1+t^2)^{\beta-1}} - \frac{1}{2(1-\beta)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{\beta-1}}$$

On obtient la formule de récurrence suivante entre I_β et $I_{\beta-1}$

$$I_\beta(t) = \frac{1}{2(\beta-1)}\left(\frac{t}{(1+t^2)^{\beta-1}} + (2\beta-3)I_{\beta-1}(t)\right)$$

puis on peut calculer de proche en proche I_β à partir de

$$I_1(t) = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{Arc}\tan t + C$$

C est une constante réelle.

Conclusion : on sait trouver les primitives de toutes les fractions rationnelles à condition de savoir les décomposer en éléments simples.

Exemple :

Calculons : $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{x+1}{2x^2+2x+5}dx$

Le trinôme du second degré $2x^2+2x+5$ possédant un discriminant négatif est toujours du signe de a, donc positif, le dénominateur ne s'annule jamais et l'intégrale I existe.

$$2x^2+2x+5 = 2\left[x^2+x+\frac{5}{2}\right] = 2\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}\right] = \frac{9}{2}\left[1+\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2\right]$$

$$I = \frac{2}{9}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{x+1}{1+\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2}dx$$

On considère la fonction $t \mapsto \frac{3t-1}{2}$, dérivable de dérivée strictement positive sur $[0;1]$. Elle réalise une bijection.

on pose $t = \frac{2x+1}{3}$

soit $x = \frac{3t-1}{2}$ avec $dx = \frac{3}{2}dt$

si $x = -\frac{1}{2}$ alors $t = 0$

si $x = 1$ alors $t = 1$

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\frac{3t-1}{2}+1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{24}$$

Exercice (MATH08E05A)

Calculer une primitive P de $\int \frac{2x^4+1}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$

2-4 Intégration des fonctions rationnelles en sinus et cosinus d'une même variable

On cherche une primitive de la forme : $\int R(\cos x, \sin x)dx$
où R est une fonction rationnelle.

Règle de Bioche :

Si l'élément différentiel $R(\sin x, \cos x)dx$ ne change pas lorsqu'on remplace :

x par –x	on pose t = cos x
x par $\pi - x$	on pose t = sin x
x par $\pi + x$	on pose t = tan x

Si aucun des changements précédents n'est possible , on pose :

$$\begin{cases} t = \tan \frac{x}{2} \\ x \in \left]-\pi;\pi\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\,\mathrm{Arc}\tan t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On rappelle les formules en fonction de la tangente de l'angle moitié

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Exemple :

Calculons : $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos 2x}dx$

C'est une intégrale de fractions rationnelles de la forme : $\int P(\cos x, \sin x)dx$

On applique la règle de Bioche: L'élément différentiel ne change pas lorsque l'on remplace x par $\pi - x$

$$\frac{\cos(\pi - x)}{\cos(2(\pi - x))}d(\pi - x) = \frac{-\cos(x)}{\cos(2x)}(-dx) = \frac{\cos x}{\cos 2x}dx$$

On considère la fonction $t \mapsto \operatorname{Arc}\sin t$, dérivable de dérivée strictement positive sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Elle réalise une bijection.

On effectue le changement de variable $t = \sin x$ et $dt = \cos x\,dx$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

On a donc : $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\frac{1}{2} - t^2}$

En appliquant la formule $\int \frac{1}{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$ avec $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+x}{\frac{\sqrt{2}}{2}-x}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right)$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

Exercice **(MATH08E06A)**

Calculer : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$

2-5 Intégration des fonctions rationnelles hyperboliques

On cherche une primitive de la forme : $\int R(\mathrm{ch}x, \mathrm{sh}x)dx$

où R est une fonction rationnelle en ch x et sh x.

On applique la règle de Bioche à " l'image virtuelle" $\int R(\cos x, \sin x)dx$

Si l'élément différentiel $R(\sin x, \cos x)dx$ ne change pas lorsqu'on remplace :

x par –x	on pose t = ch x
x par π – x	on pose t = sh x
x par π + x	on pose t = th x

Si aucun des changements précédents n'est possible , on pose : $t = \mathrm{th}\frac{x}{2}$

Cependant, il est toujours possible de se ramener à une fonction rationnelle en t par le changement de variable $t = e^x$

Exemple :

Calculons une primitive P de $\int \mathrm{ch}^3 x\,dx$

L'image virtuelle de l'élément différentiel $\int \cos^3 x\,dx$ ne change pas lorsque l'on remplace x par π–x

On pose $t = \mathrm{sh}\,x$
On a ainsi : $dt = \mathrm{ch}\,x\,dx$

On écrit : $\int \mathrm{ch}^2 x\,\mathrm{ch}\,x\,dx = \int \left(1+\mathrm{sh}^2 x\right)\mathrm{ch}\,x\,dx$

Soit : $\int \left(1+t^2\right)dt = t + \dfrac{t^3}{3} + C$

Finalement : $P(x) = \mathrm{sh}\,x + \dfrac{\mathrm{sh}^3 x}{3} + C$ où C est une constante réelle.

Exercice (MATH08E07A)

Calculer une primitive P de: $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}\,x}$

2-6 Intégration des fonctions rationnelles en x et en $\sqrt{ax^2+bx+c}$

On cherche une primitive de la forme : $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$
où R est une fraction rationnelle

La recherche des primitives est reliée à la paramétrisation de la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

La courbe Γ est un arc de conique dont la nature dépend des signes de a et de Δ

si $a<0$ et $\Delta>0$, alors Γ est un arc d'ellipse
si $a>0$ et $\Delta<0$, alors Γ est un arc d'hyperbole n'intersectant pas (Ox)
si $a>0$ et $\Delta>0$, alors Γ est un arc d'hyperbole intersectant (Ox)

On effectue la décomposition canonique du trinôme du second degré et, après changement de variable, on se ramène à la recherche d'une primitive contenant $\sqrt{1-t^2}$ ou $\sqrt{1+t^2}$ ou encore $\sqrt{t^2-1}$

On obtient :

cas 1 : $\sqrt{1-t^2}$ on pose alors t = sin s
cas 2 : $\sqrt{1+t^2}$ on pose alors t = sh s

cas 3 : $\sqrt{t^2-1}$ on pose alors t = ch s

grâce aux formules de trigonométrie, on peut alors supprimer la racine.

Remarque :

dans le cas particulier du calcul : $P(x)=\int \frac{dx}{(\lambda x+\mu)\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

Il est préférable de commencer par effectuer le changement de variable $t=\frac{1}{\lambda x+\mu}$

ce qui ramène le calcul à : $\int \frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2+\beta t+\gamma}}$ avec $(\alpha,\beta,\gamma)\in R^3$

(Vous pourrez à titre d'exercice vérifier ce résultat)

Exemple :

Calculons :

$$I=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

Ce sont des intégrales abéliennes de la forme $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

d'après le signe du trinôme du second degré, I existe sur $[-1;3]$ .donc sur $[1;2]$

Effectuons la décomposition canonique du trinôme du second degré

$$-x^2+2x+3=-[x^2-2x-3]=-[(x-1)^2-4]=4\left[1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]$$

$$I=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}$$

On considère la fonction $t\mapsto 2t+1$, dérivable de dérivée strictement positive sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Elle réalise une bijection.

et posons alors $t=\frac{x-1}{2}$ d'où $dt=\frac{dx}{2}$

$x=1 \Rightarrow t=0$

$x=2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

d'où $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=[\operatorname{Arc}\sin t]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}$

- Calculons une primitive P de $\int \frac{dx}{x\sqrt{-2+3x-x^2}}$

D'après le signe du trinôme $-2+3x-x^2>0$ sur $\left]1;2\right[$

P existe sur tout intervalle I de $\left]1;2\right[$

Il est préférable de commencer par effectuer le changement de variable $t=\dfrac{1}{x}$

soit :

$x=\dfrac{1}{t}$ et $dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$

On obtient:

$$-\int\frac{dt}{t\sqrt{-2+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{-2t^2+3t-1}}$$

Or $-2t^2+3t-1=-2\left(t^2-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{1}{2}\right)=-2\left(\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}\left(1-(4t-3)^2\right)$

Donc $-2\sqrt{2}\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{1-(4t-3)^2}}=\frac{-2\sqrt{2}}{4}\int\frac{4\,dt}{\sqrt{1-(4t-3)^2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\int\frac{4\,dt}{\sqrt{1-(4t-3)^2}}$

Soit sur l'intervalle d'intégration I :

$$P(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arc}\sin(4t-3)+C=-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{4}{x}-3\right)+C$$

Où C étant une constante réelle.

Exercice **(MATH08E08A)**

Calculer l'intégrale suivante

$$I=\int_1^2 \sqrt{-x^2+2x+3}\,dx$$

2-7 Intégration des fonctions rationnelles de x et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

On cherche une primitive de la forme : $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

où R est une fraction rationnelle.

Soit h la fonction homographique définie par $h(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

On suppose que a, b, c et d sont des réels tels que $ad-bc\neq 0$ de façon que h ne soit pas constante.

On effectue le changement de variable $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ sur un intervalle où h(x) est positive. On se ramène ainsi à la recherche d'une primitive d'une fraction rationnelle.

Exemple :

Calculons une primitive de

$$x\mapsto \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$P(x)=\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$$

P existe sur tout intervalle I contenu dans $]-\infty,-1]\cup\,]1,+\infty[$

Posons $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ c'est à dire $x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$

on a $dx=-\dfrac{4t\,dt}{(t^2-1)^2}$

$$\int \frac{-4t^2\,dt}{(t^2+1)(t^2-1)}=-\int\frac{1}{t-1}dt+\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}dt=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-2\operatorname{Arc\,tan} t+C$$

$$P(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}\right| - 2\,\mathrm{Arc}\tan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - 2\,\mathrm{Arc}\tan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C$$

$$= \mathrm{Argch}\,x - 2\,\mathrm{Arc}\tan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C$$

C est une constante réelle.

Exercice (MATH08E09A)

Calculer une primitive P de $x \mapsto \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

Exercice (MATH08E01B)

Donner les intervalles d'existence et calculer les primitives suivantes :

$$P_1(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$P_2(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$P_3(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

Exercice **(MATH08E01C)**

Donner les intervalles d'existence et calculer les primitives suivantes :

$$P_1(x) = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$$

$$P_2(x) = \int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 9}$$

$$P_3(x) = \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 5}dx$$

Exercice (MATH08E02B)

Calculer $I = \int_0^1 x \operatorname{Arc}\tan x \, dx$

Exercice (MATH08E02C)

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1 + \sin x)\,dx$

Exercice (MATH08E03B)

Calculer $I = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin^2 x \, dx$

Exercice (MATH08E04B)

Calculer

$$P(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Exercice (MATH08E04C)

(difficile)

Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'un changement de variable :

$$\int_0^1 \sqrt{16x^2+9}\,dx$$

Exercice (MATH08E05B)

Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$$

Exercice (MATH08E05C)

Exercice plus difficile

$$I = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} \text{ puis } J = \int_{-2}^{1} \frac{x+1}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx$$

Exercice **(MATH08E06B)**

Calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

Exercice

(MATH08E06C)

Calculer une primitive P de

$$x \mapsto \int \frac{dx}{\cos x - \cos 3x}$$

Exercice **(MATH08E07B)**

Calculer une primitive P de $x \mapsto \int \mathrm{sh}^3 x \, dx$

Exercice (MATH08E08B)

Calculer une primitive P de $x \mapsto \int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$

Exercice **(MATH08E08C)**

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{8}} \frac{dx}{\sqrt{-8x^2 + 4x + 1}}$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{8}} \sqrt{-8x^2 + 4x + 1}\, dx$$

Exercice **(MATH08E09B)**

Calculer une primitive P de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Exercice (MATH08E09C)

Calculer une primitive P de $x \mapsto \dfrac{x + \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}{x^2 - 1}$

Aide (MATH08E01A)

- Pour P_1 et P_2

  Il faut développer le carré et intégrer chaque terme de la somme. Il est souvent plus facile de mettre les racines sous forme de puissance et d'utiliser la formule :

  $$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} \qquad r \neq -1$$

  exemple :

  $$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

- Pour P_3, il faut faire apparaître $\frac{u'}{u}$

- Pour P_4, il faut faire apparaître $-\frac{u'}{u^2}$

Retour

Aide (MATH08E01B)

Il faut impérativement donner un intervalle où les primitives existent.

- Pour P_1, plaçons nous sur un intervalle où sin x ne s'annule pas

  Il faut reconnaître : $-\int -\frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} + C$

- Pour P_2, plaçons nous sur un intervalle où cos x ne s'annule pas

  Il faut reconnaître : $\int -\frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{u} + C$

- Pour P_3, plaçons nous sur un intervalle où sin x ne s'annule pas

  Il faut reconnaître : $-\int -\frac{1}{u^3}\,du = -\frac{1}{2u^2} + C$

Retour

Aide (MATH08E01C)

- Pour P_1 : il faut reconnaître $2\int \frac{u'}{2\sqrt{u}} = 2\sqrt{u(x)} + C$

- Pour P_2 : il faut penser à écrire $4x^2 - 12x + 9$ comme un carré puis reconnaître $-\int \frac{-u'}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$ et penser à intégrer sur des intervalles où la fonction est définie.

- Pour P_3 : l'intervalle d'étude est l'ensemble des réels. Il faut reconnaître $\int \frac{u'}{u} = \ln|u(x)| + C$

Retour

Aide (MATH08E02A)

- **Pour I :**

On peut faire une intégration par parties en posant :
$u = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$u' = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1\dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- **pour J :**

On peut faire une intégration par parties en posant :
$u = \ln^2 x$

Rappelez-vous que $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln x$.

Si vous ne voulez pas retenir cette primitive usuelle, vous pouvez recommencer une intégration par parties en posant $u = \ln x$

Retour

Aide (MATH08E02B)

- **Pour I :**

On peut faire une intégration par parties en posant :
$u = \mathrm{Arc}\tan x$
Pensez à l'astuce $x^2 = x^2 + 1 - 1$

- **Pour J :**

Il faut faire une intégration par parties en posant : $u = (\mathrm{Arc}\tan x)^2$
On utilise dans la deuxième partie de l'intégrale l'astuce maintenant très classique : $x^2 = x^2 + 1 - 1$
Puis on trouve en calcul intermédiaire :

$$J = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \mathrm{Arc}\tan x \, dx = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \mathrm{Arc}\tan x \, dx + \int_0^1 \frac{\mathrm{Arc}\tan x}{1+x^2} dx$$

Pour la deuxième intégrale, Il faut reconnaître la forme u' u
Pour la première, il faut de nouveau intégrer par parties en posant :
$u = \mathrm{Arc}\tan x$

Retour

Aide (MATH08E02C)

On peut faire une intégration par parties en posant :

$u = \ln(1 + \sin x)$

$v' = \sin x$

Et penser à la relation : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Retour

Aide (MATH08E03A)

On pose à priori le résultat sous la forme :

$$P(x) = \int \cos 3x\, e^{-4x}\, dx = (\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x)e^{-4x} + C$$

On dérive et on identifie.

Retour

Aide (MATH08E03B)

Il faut linéariser

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Puis on pose à priori la forme du résultat de la deuxième intégrale

$$\int e^{-x} \cos 2x dx = e^{-x} (\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x) + C$$

Retour

Aide (MATH08E04A)

- Pour I_1, afin de faire disparaître la racine carrée, on peut effectuer le changement de variable suivant : $t = \sqrt{x}$

  Puis pour intégrer, on remarquera que $t = t + 1 - 1$

- Pour I_2, on peut effectuer le même changement de variable : $t = \sqrt{x}$

Retour

Aide (MATH08E04B)

On effectue le changement de variable : $\begin{cases} x = \sin t \\ t \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \operatorname{Arc}\sin x \\ x \in \left]-1;1\right[\end{cases}$

Ensuite, il faut linéariser $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$

Puis remplacer t par Arc sin x

Retour

Aide (MATH08E04C)

Exercice plus difficile

Il faut faire apparaître $\sqrt{1+\frac{16}{9}x^2}$

Puis poser $\operatorname{sh} t = \frac{4}{3}x$

Pour simplifier le résultat, on pourra utiliser la formule : $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

On trouve finalement un résultat relativement simple : $I = \frac{5}{2} + \frac{9}{8}\ln 3$

Retour

Aide (MATH08E05A)

Décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples:

$$\frac{2x^4+1}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

on trouve finalement :

$$P(x)=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{11}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{3}{4}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

Retour

Aide (MATH08E05B)

On rappelle que : $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

On décompose la fonction rationnelle : $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{mx+n}{x^2-x+1}$

Il faut alors canoniser le dénominateur du deuxième terme.

On effectue ensuite un changement de variable pour se ramener à :

$\dfrac{at}{t^2+1} + \dfrac{b}{t^2+1}$

dont on connaît des primitives

Retour

Aide (MATH08E05C)

- Pour I, il faut effectuer une décomposition canonique du dénominateur et faire un changement de variable pour se ramener à la forme : $\int \frac{1}{t^2+1}dt$

- Pour J, on écrit le numérateur (x+1) comme la somme d'un multiple de la dérivée du trinôme et d'une constante : $x+1=\frac{1}{2}(2x+4)-1$.

  Pour le deuxième terme : $\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\frac{1}{(x^2+4x+13)^2}dx$ on utilise la décomposition canonique du dénominateur et on obtient alors la forme : $\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\int \frac{1+t^2-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt$

  Le deuxième terme s'intègre alors par parties.

Retour

Aide (MATH08E06A)

D'après la règle de Bioche, il n'y a pas d'invariant. On pose $t = \tan \frac{x}{2}$

On rappelle que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

On rappelle également la formule du cours : $\int \frac{1}{a^2+t^2}\,dt = \frac{1}{a}\operatorname{Arc}\tan\frac{t}{a}$

Retour

Aide (MATH08E06B)

Vous pouvez choisir parmi deux méthodes :

- On pose : $t = \cos x$, il faudra après changement de variable décomposer la fonction rationnelle obtenue en éléments simples.
- on pose : $t = \tan x$, l'intégration après changement de variable est immédiate.

Retour

Aide (MATH08E06C)

On remarquera que : $\cos x - \cos 3x = 2\sin 2x \sin x = 4\sin^2 x \cos x$

En appliquant la règle de Bioche, on posera alors : $t = \sin x$

On décomposera ensuite la fonction rationnelle obtenue en éléments simples.

Retour

Aide (MATH08E07A)

L'image virtuelle de l'élément différentiel $\int \frac{dx}{\cos x}$ ne change pas lorsque l'on remplace x par $\pi - x$
Conformément à la règle de Bioche,
On pose : $t = \operatorname{sh} x$

Retour

Aide (MATH08E07B)

L'image virtuelle de l'élément différentiel $\int \sin^3 x \, dx$ ne change pas lorsque l'on remplace x par –x
On applique la règle de Bioche : on pose $t = \text{ch}\, x$

L'intégration devient alors élémentaire.

Retour

Aide (MATH08E08A)

Il faut décomposer canoniquement le trinôme du second degré et se ramener à la forme : $\sqrt{1-u^2}$
On pose alors : $\sin t = u$
L'intégration devient alors élémentaire.

Retour

Aide (MATH08E08B)

On fait apparaître $\sqrt{1+u^2}$

On pose alors : $u = \mathrm{sh}\, t$

La suite est « relativement » simple

Retour

Aide (MATH08E08C)

- Pour I_1 :Il faut canoniser le trinôme du second degré et obtenir : $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

  Effectuer ensuite un changement de variable judicieux pour pouvoir intégrer en Arcsin

- Pour I_2 : On utilise la même décomposition pour obtenir : $\sqrt{1-u^2}$
  puis on pose : $u = \sin t$

Les deux intégrales sont alors élémentaires.

Retour

Aide (MATH08E09A)

On pose $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ c'est-à-dire $x=\dfrac{1}{t^2-1}$

L'intégrale ne pose alors aucun problème

Retour

Aide (MATH08E09B)

On pose $y = \sqrt[6]{x}$ c'est-à-dire $x = y^6$

Ensuite normalement tout va bien !

Retour

Aide (MATH08E09C)

On pose $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ donc $x = \dfrac{1+y^2}{1-y^2}$

Puis on décompose en éléments simple la fonction rationnelle obtenue.

Retour

Solution (MATH08E01A)

- P_1 existe sur $I_1 =]0,+\infty[$

  $$P_1(x) = \int (x + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx = \int (x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x})dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ln|x| + C$$

  C est une constante réelle. x étant strictement positif, on peut remarquer que $\ln|x| = \ln x$

- P_2 existe sur $I_2 = [0,+\infty[$

  $$P_2(x) = \int (\sqrt{x} + 1)^2 dx = \int (x + 2\sqrt{x} + 1)dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C$$

  C est une constante réelle

- P_3 existe sur R

  On remarque la forme suivante :

  $$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$$

  u(x) étant strictement positive :

  $$P_3(x) = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$$

  C est une constante réelle

- P_4 existe sur R

  Sur un intervalle où u(x) n’est pas nulle, on remarque la forme suivante :

  $$\int \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx = -\frac{1}{u(x)} + C$$

  $$P_4(x) = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} dx = -\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^4)} + C$$

  C est une constante réelle

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E01B)

- Plaçons nous dans un intervalle I où sin x ne s'annule pas

  $I =]k\pi ; (k+1)\pi[\qquad k \in Z$

  Si l'on pose t = sin x, on reconnaît la forme :

  $$\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C$$

  $$P_1(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C$$

  C est une constante

- Plaçons nous dans un intervalle I où cos x ne s'annule pas

  $$I = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\qquad (k \in Z)$$

  Si on pose t = cos x, on reconnaît la forme :

  $$\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C$$

  $$P_2(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C$$

  C est une constante réelle

- Plaçons nous dans un intervalle I où sin x ne s'annule pas

  $I =]k\pi ; (k+1)\pi[\qquad k \in Z$

  Si l'on pose t = sin x, on reconnaît la forme :

  $$\int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2t^2} + C$$

  $$P_3(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

  C est une constante réelle

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E01C)

- P_1 existe sur R car $1+x^4>0$

  On reconnaît la forme : $2\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}dx = 2\sqrt{u(x)}+C$

  $$P_1(x)=\frac{1}{2}\int\frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}+C$$

  où C est une constante réelle

- $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$

  P_2 existe sur $R-\left\{\frac{3}{2}\right\}$

  $$P_2(x)=\int\frac{dx}{4x^2-12x+9}=\int\frac{dx}{(2x-3)^2}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\frac{1}{(2x-3)}+C_1 & \text{sur} \quad \left]-\infty,\frac{3}{2}\right[\\ -\frac{1}{2}\frac{1}{(2x-3)}+C_2 & \text{sur} \quad \left]\frac{3}{2},+\infty\right[\end{cases}$$

  où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

- Le discriminant du trinôme est négatif donc $x^2+2x+5>0$

  donc P_3 existe sur R

  On remarque la forme suivante : $\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln|u(x)|+C$

  $$P_3(x)=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C$$

  où C est une constante réelle.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH08E02A)

- Calcul de I

$$I = \int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx = \int_0^1 \mathrm{Argsh}x\,dx$$

on intègre par parties en posant :

$$u = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad u' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$v = x \qquad v' = 1$$

$$I = \left[x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left[x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$= \left[x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}\right]_0^1$$

Finalement :

$$I = \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$$

- Calcul de J

On intègre par parties

$$u = \ln^2 x \qquad u' = 2\frac{\ln x}{x}$$

$$v = x \qquad v' = 1$$

$$J = \left[x\ln^2 x\right]_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx = e - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e$$

$$J = e - 2(e - e + 1) = e - 2$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E02B)

- **Pour I :**

on intègre par parties

$$u = \operatorname{Arc}\tan x \qquad u' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$v = \frac{1}{2}x^2 \qquad v' = x$$

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arc}\tan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \operatorname{Arc}\tan x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

- **Pour J :**

On intègre par parties:

$$u = (\operatorname{Arc}\tan x)^2 \qquad u' = \frac{2}{1+x^2}\operatorname{Arc}\tan x$$

$$v = \frac{1}{2}x^2 \qquad v' = x$$

$$J = \left[\frac{1}{2}x^2 (\operatorname{Arc}\tan x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{Arc}\tan x\,dx$$

$$J = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\operatorname{Arc}\tan x\,dx = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \operatorname{Arc}\tan x\,dx + \int_0^1 \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{1+x^2}dx$$

Pour calculer $\int_0^1 \operatorname{Arc}\tan x \; dx$, on intègre une nouvelle fois par parties:

$$u = \operatorname{Arc}\tan x \qquad u' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$v = x \qquad v' = 1$$

$$\int_0^1 \operatorname{Arc}\tan x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{1+x^2}dx$ fait apparaître une primitive de uu' : $\frac{u^2}{2}$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{Arc}\tan x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}$$

$$\text{Finalement : } J = \int_0^1 x(\operatorname{Arc}\tan x)^2\,dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E02C)

on intègre par parties

$$u = \ln(1+\sin x) \qquad u' = \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$v = -\cos x \qquad v' = \sin x$$

$$I = \left[-(\cos x)\ln(1+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$$

or $\quad \cos^2 x = 1-\sin^2 x = (1+\sin x)(1-\sin x)$

Finalement :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)dx = \left[x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH08E03A)

On cherche p(x) sous la forme :

$$P(x) = \int \cos 3x\, e^{-4x}\, dx = (\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x)e^{-4x} + C$$

où λ et μ sont des constantes réelles à déterminer.

En dérivant, on obtient :

$$\cos 3x\, e^{-4x} = [(-4\lambda + 3\mu)\cos 3x + (-3\lambda - 4\mu)\sin 3x]e^{-4x} + C$$

par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -4\lambda + 3\mu = 1 \\ -3\lambda - 4\mu = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{4}{25} \quad \mu = \frac{3}{25}$$

finalement :

$$P(x) = \int \cos 3x\, e^{-4x}\, dx = \left(-\frac{4}{25}\cos 3x + \frac{3}{25}\sin 3x\right)e^{-4x} + C$$

où C est une constante réelle

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E03B)

en linéarisant

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-x}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-x}dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos 2x dx = I_1 - I_2$$

- $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-x}dx = \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_0^{2\pi} = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2}$

On pose à priori la forme du résultat de la deuxième intégrale

$$\int e^{-x}\cos 2x dx = e^{-x}(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x) + C$$

où λ et μ sont deux constantes réelles à déterminer.

En dérivant, puis en identifiant, on obtient le système

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = 1 \\ -2\lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

Qui donne les résultats suivants :

$$\lambda = -\frac{1}{5} \text{ et } \mu = \frac{2}{5}$$

soit :

$$\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos 2x dx = \left[e^{-x}\left(-\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{5}(1 - e^{-2\pi})$$

d'où $I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos 2x\, dx = \frac{1}{10}\left(1 - e^{-2\pi}\right)$

finalement :

$$I = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2} - \frac{1 - e^{-2\pi}}{10} = \frac{2}{5}(1 - e^{-2\pi})$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH08E04A)

- $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

  On effectue le changement de variable
  $t = \sqrt{x}$ ou $x = t^2$
  En différentiant, on obtient :
  dx = 2tdt
  Si x = 0 alors t = 0
  Si x = 1 alors t = 1
  Cela donne :

  $$I_1 = 2\int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = 2\int_0^1 \frac{1+t-1}{1+t}dt = 2\int_0^1 (1-\frac{1}{1+t})dt = 2[t-\ln(1+t)]_0^1 = 2(1-\ln 2)$$

- $I_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

  On effectue le changement de variable
  $t = \sqrt{x}$ ou $x = t^2$
  En différentiant, on obtient :
  dx = 2tdt
  Si x = 1 alors t = 1
  Si x = 2 alors $t = \sqrt{2}$

  $$I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t}{t+t^2}dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+t}dt = 2[\ln(1+t)]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E04B)

Les primitives existent pour x dans l'intervalle $]-1;1[$

On effectue alors le changement de variable x = sin t avec $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

On a alors :

$$dx = \cos t\,dt$$
$$t = \operatorname{Arc}\sin x$$
$$\cos t > 0 \quad \text{donc} \quad \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$$

Donc

$$P(x) = \int \frac{\sin^2(t)\cos(t)dt}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin t\cos t + C$$

$$P(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

Où C est une constante réelle.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E04C)

$$\int_0^1 \sqrt{16x^2+9}\,dx = 3\int_0^1 \sqrt{\frac{16}{9}x^2+1}\,dx$$

On pose : $\operatorname{sh}t = \frac{4}{3}x$ soit $t = \operatorname{Argsh}\left(\frac{4}{3}x\right)$

En différentiant $\operatorname{ch}t\,dt = \frac{4}{3}dx$

$$I = 3\int_0^{\operatorname{Argsh}\frac{4}{3}} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\,\frac{3}{4}\operatorname{ch}t\,dt = \frac{9}{4}\int_0^{\operatorname{Argsh}\frac{4}{3}} \operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac{9}{4}\int_0^{\operatorname{Argsh}\frac{4}{3}} \frac{\operatorname{ch}(2t)+1}{2}dt$$

$$I = \frac{9}{8}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t + t\right]_0^{\operatorname{Argsh}\frac{4}{3}}$$

$$I = \frac{9}{8}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sh}\left(2\operatorname{Argsh}\frac{4}{3}\right) + \operatorname{Argsh}\frac{4}{3}\right]$$

On sait que $\operatorname{Argsh}x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ et $\operatorname{sh}2u = 2\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u$, donc

$$\operatorname{Argsh}\frac{4}{3} = \ln\left(\frac{4}{3}+\sqrt{1+\frac{16}{9}}\right) = \ln 3$$

De plus

$$\operatorname{sh}\left(2\operatorname{Argsh}\frac{4}{3}\right) = 2\operatorname{sh}\left(\operatorname{Argsh}\frac{4}{3}\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{Argsh}\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{1+\frac{16}{9}} = \frac{40}{9}$$

Finalement $I = \frac{9}{8}\left(\frac{1}{2}\frac{40}{9}+\ln 3\right)$

$$I = \frac{5}{2}+\frac{9}{8}\ln 3$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH08E05A)

Une primitive P existe sur tout intervalle ne contenant pas la valeur 1
Donc P existe sur $I_1 \subset]-\infty;1[$ et P existe sur $I_2 \subset]1;+\infty[$
Décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples:

$$\frac{2x^4+1}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

On multiplie les deux membres par $(x-1)^3$ et l'on remplace x par 1 alors $A_1 = \frac{3}{2}$

On multiplie les deux membres par x^2+1 et l'on remplace x par i

$$\frac{3}{(i-1)^3} = \frac{3}{2(1+i)} = \frac{3}{4}(1-i) = Mi + N$$

En écrivant l'égalité des 2 nombres complexes (égalité des parties réelles puis des parties imaginaires) alors $M = -\frac{3}{4}$ et $N = \frac{3}{4}$

On multiplie les 2 membres par x et l'on fait tendre x vers $+\infty$ alors $A_3 = \frac{11}{4}$

On remplace x par 0 alors $A_2 = \frac{5}{2}$

$$P(x) = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{11}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{3}{4}\int\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

Donc sur I_1

$$P(x) = -\frac{3}{4}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{5}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{11}{4}\ln(1-x) - \frac{3}{8}\ln(x^2+1) + \frac{3}{4}\operatorname{Arc}\tan x + C_1$$

et sur I_2

$$P(x) = -\frac{3}{4}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{5}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{11}{4}\ln(x-1) - \frac{3}{8}\ln(x^2+1) + \frac{3}{4}\operatorname{Arc}\tan x + C_2$$

C_1 et C_2 étant des constantes réelles.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice

Retour

Solution (MATH08E05B)

Il faut décomposer en éléments simples cette fonction rationnelle
on factorise l'expression du troisième degré $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{mx+n}{x^2-x+1}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$$

$$i_1=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{3}[\ln(x+1)]_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$$

$$i_2=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{-x+2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{4}{9}\int_0^1\frac{-x+2}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx$$

on pose $t=\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ c'est à dire $x=\frac{\sqrt{3}t+1}{2}$ on a alors $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$x=0\Rightarrow t=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x=1\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$i_2=\frac{2\sqrt{3}}{9}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{-\frac{\sqrt{3}t+1}{2}+2}{t^2+1}dt=-\frac{1}{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{t}{t^2+1}dt+\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{t^2+1}$$

La première intégrale est nulle car on intègre une fonction impaire sur un intervalle centré en 0. La fonction de la deuxième intégrale étant paire on a $\int_{-a}^{+a}f(t)\,dt=2\int_0^a f(t)\,dt$ d'où

$$i_2=0+2\frac{\sqrt{3}}{3}[\operatorname{Arc\,tan} t]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=2\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\pi}{6}-0\right]=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

et finalement $I=\int_0^1\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E05C)

Le trinôme du second degré $x^2+4x+13$ n'ayant pas de racine, les intégrales I et J existent.

- **Calcul de I :**

Effectuons la décomposition canonique du trinôme:

$$x^2+4x+13=(x+2)^2+9=9\left[\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1\right]$$

$$I=\frac{1}{9}\int_{-2}^{1}\frac{dx}{1+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}$$

Le changement de variable est $t=\dfrac{x+2}{3}$

$$I=\int_{-2}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+13}=\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{3}\left[\operatorname{Arc}\tan t\right]_0^1=\frac{1}{3}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

- **Calcul de J :**

on écrit le numérateur (x+1) comme la somme d'un multiple de la dérivée du trinôme et d'une constante

$$x+1=\frac{1}{2}(2x+4)-1$$

et $J=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{2x+4}{(x^2+4x+13)^2}dx-\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(x^2+4x+13)^2}=J_1-J_2$

Pour $J_1=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{2x+4}{(x^2+4x+13)^2}dx$ on pose $u=x^2+4x+13$ et $J_1=\dfrac{1}{36}$

Pour $J_2=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{1}{(x^2+4x+13)^2}dx$

$J_2=\dfrac{1}{81}\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{dx}{\left[\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1\right]^2}$ en posant $t=\dfrac{x+2}{3}$

$$J_2=\frac{1}{27}\int_{0}^{1}\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{27}\left[\int_{0}^{1}\frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}dt-\int_{0}^{1}\frac{t.tdt}{(1+t^2)^2}\right]$$

le dernier terme s'intègre par parties, on obtient finalement:

$$J=\int_{-2}^{1}\frac{x+1}{(x^2+4x+13)^2}dx=\frac{1}{54}-\frac{\pi}{216}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH08E06A)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$$

D'après la règle de Bioche, il n'y a pas d'invariant. On pose $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } 2\,dt = (1+t^2)dx$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

En remplaçant :

$$I = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\left[2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2}$$

Or le formulaire nous donne :

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}dt = \frac{1}{a}\operatorname{Arc}\tan\frac{t}{a}$$

Soit :

$$I = 2\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc}\tan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E06B)

- C'est une intégrale de fractions rationnelles de la forme : $\int P(\cos x, \sin x)dx$.

On applique la règle de Bioche : L'élément différentiel ne change pas lorsque l'on remplace x par –x

On pose : $t = \cos x$
donc : $dt = -\sin x\, dx$
$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\tan x\, dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{\sin x\, dx}{\cos x\left(1 + 1 - \cos^2 x\right)} = -\frac{dt}{t\left(2 - t^2\right)}$$

On obtient : $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t(2 - t^2)}$

On peut décomposer en éléments simples la fonction rationnelle. On a alors :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t(2 - t^2)} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{2\left(2 - t^2\right)}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{-2t}{\left(2 - t^2\right)}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln t - \frac{1}{2}\ln\left(2 - t^2\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{4}\ln 7$$

- Autre méthode : l'élément différentiel ne change pas lorsque l'on remplace x par π+x, on pose alors $t = \tan x$

$$\frac{\tan x\, dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{\frac{tdt}{1 + t^2}}{2 - \cos^2 x} = \frac{\frac{tdt}{1 + t^2}}{2 - \frac{1}{1 + t^2}} = \frac{tdt}{1 + 2t^2}$$

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t\,dt}{1 + 2t^2} = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4t\,dt}{1 + 2t^2} = \frac{1}{4}\left[\ln\left(1 + 2t^2\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\ln 7$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E06C)

$$\cos x - \cos 3x = 2\sin 2x \sin x = 4\sin^2 x \cos x$$

Les primitives existent sur tout intervalle I où cos x et sin x ne s'annulent pas. I est donc un intervalle de $\left]k\frac{\pi}{2},(k+1)\frac{\pi}{2}\right[$ $(k \in Z)$

C'est une intégrale de fractions rationnelles de la forme : $\int \ (\cos x \ \sin x \ dx$

$$t = \sin x \ \text{ avec } \ dt = \cos x \, dx$$

$$P(x) = \frac{1}{4}\int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)}$$

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}$$

$$\int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \text{, ici } 0 < t < 1$$

finalement :

$$P(x) = -\frac{1}{4\sin x} + \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C$$

C étant une constante réelle.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH08E07A)

Calculons une primitive P de $x \mapsto \int \frac{dx}{\text{ch } x}$

L'image virtuelle de l'élément différentiel $\int \frac{dx}{\cos x}$ ne change pas lorsque l'on remplace x par $\pi - x$

Conformément à la règle de Bioche,

On pose : $t = \text{sh } x$

On sait que $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$

On a donc $dt = \text{ch } x \, dx$ et $\int \frac{1}{\text{ch } x} dx = \int \frac{\text{ch } x}{\text{ch}^2 x} dx = \int \frac{dt}{1 + t^2}$.

Finalement : $P(x) = \text{Arc}\tan(\text{sh } x) + C$

C est une constante réelle

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E07B)

L'image virtuelle de l'élément différentiel $\int \sin^3 x\,dx$ ne change pas lorsque l'on remplace x par $-x$
On applique la règle de Bioche,

On pose $t = \text{ch}\,x$
On a ainsi : $dt = \text{sh}\,x\,dx$

On écrit : $P(x) = \int \text{sh}^2 x\,\text{sh}\,x\,dx = \int \left(\text{ch}^2 x - 1\right)\text{sh}\,x\,dx$

Soit : $\int \left(t^2 - 1\right)dt = \dfrac{t^3}{3} - t + C$

Finalement : $P(x) = \dfrac{\text{ch}^3 x}{3} - \text{ch}\,x + C$
C est une constante réelle.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH08E08A)

$$I=\int_1^2 \sqrt{-x^2+2x+3}\,dx$$

I est bien définie sur $[1;2]$ car $-x^2+2x+3>0$ sur cet intervalle
en utilisant la décomposition canonique de l'exemple du cours

$$I=2\int_1^2 \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\,dx$$

La fonction $t\mapsto 2\sin t+1$ est dérivable, de dérivée strictement positive sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$

on utilise le changement de variable $\sin t=\frac{x-1}{2}$ ou $t=\text{Arc}\sin\left(\frac{x-1}{2}\right)$

$dx=2\cos t\,dt$

$x=1 \Rightarrow t=\text{Arc}\sin 0=0$

$x=2 \Rightarrow t=\text{Arc}\sin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\;dt$$

$\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|$

$t\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ donc $|\cos t|=\cos t$

et $I=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt=2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E08B)

Intégrale abélienne de la forme : $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

R est un fonction rationnelle avec a non nul

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

on pose $x+1=\operatorname{sh} t$ d'où $dx=\operatorname{ch} t\, dt$

$t=\operatorname{Argsh}(x+1)=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$

On a $\int(-1+\operatorname{sh} t)\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}\operatorname{ch} t dt=\int(-1+\operatorname{sh} t)\operatorname{ch}^2 t\, dt=\int-\operatorname{ch}^2 t dt+\int \operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh} t\, dt$

on linéarise $\operatorname{ch}^2 t$

$$\operatorname{ch}^2 t=\frac{\operatorname{ch} 2t+1}{2}$$

$$=-\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 t+C=-\frac{1}{4}2\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}\left(\operatorname{ch}^2 t\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{sh} t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}(1+\operatorname{sh}^2 t)^{3/2}+C$$

$$P(x)=-\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+\frac{1}{3}(x^2+2x+2)^{3/2}+C$$

ou encore

$$P(x)=-\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\operatorname{Argsh}(x+1)+\frac{1}{3}(x^2+2x+2)^{3/2}+C$$

C est une constante réelle.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E08C)

- **Calcul de I_1**

Les racines de l'équation du second degré sont : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

D'après le signe du trinôme du second degré l'intégrale existe.

Effectuons la décomposition canonique:

$$-8x^2+4x+1=-8\left[x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\right]=-8\left[(x-\frac{1}{4})^2-\frac{3}{16}\right]=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{4x-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

$$I_1=\sqrt{\frac{2}{3}}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{8}}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \quad \text{on pose} \quad t=\frac{4x-1}{\sqrt{3}} \quad \text{d'où} \quad dt=\frac{4}{\sqrt{3}}dx$$

En changeant les bornes, on obtient :

$$I_1=\sqrt{\frac{2}{3}}x\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{Arc}\sin t\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$$

- **Calcul de I_2**

puisque l'intégrale I_1 existe, il en est de même de I_2

Avec la même décomposition que précédemment, on obtient :

$$I_2=\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{8}}\sqrt{1-\left(\frac{4x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx$$

on pose $\sin t=\dfrac{4x-1}{\sqrt{3}}$ d'où $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos t\,dt$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=0 \\ x=\frac{5}{8}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \quad \Rightarrow \cos t>0$$

$$I_2=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt=\frac{3\sqrt{2}}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$I_2=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{8}}\sqrt{-8x^2+4x+1}\,dx=\frac{3\sqrt{2}}{16}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{16}+\frac{3\sqrt{6}}{64}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH08E09A)

P existe sur tout intervalle I contenu dans $]-\infty;-1] \cup]0;+\infty[$

On pose $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ c'est-à-dire $x=\dfrac{1}{t^2-1}$

$$dx=\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

On obtient
$$-2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}=-2\int\frac{\left(t^2-1+1\right)dt}{t^2-1}=-2\int dt+2\int\frac{dt}{1-t^2}$$
$$=-2t+\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C$$

finalement
$$P(x)=-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right|+C$$

C est une constante réelle.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E09B)

P existe sur tout intervalle I contenu dans $]0;+\infty[$

On pose $y=\sqrt[6]{x}$ c'est-à-dire $x=y^6$

$dx=6y^5dy$

On obtient donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}=\int\frac{6y^5dy}{y^3+y^2}=6\int\frac{y^3}{y+1}dy=6\int\left(y^2-y+1-\frac{1}{y+1}\right)dy$$

$$=6\left(\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y-\ln|y+1|\right)+C=2y^3-3y^2+6y-6\ln|y+1|+C$$

Finalement : $P(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$

C est une constante réelle

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (cliquez sur Exercice).

Exercice Retour

Solution (MATH08E09C)

Les primitives existent sur tout intervalle I de $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

On pose $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ donc $x=\dfrac{1+y^2}{1-y^2}$ et $dx=\dfrac{4y}{\left(1-y^2\right)^2}dy$

d'où :

$$\int f(x)dx=\int\frac{\dfrac{1+y^2}{1-y^2}+y}{\left(\dfrac{1+y^2}{1-y^2}\right)^2-1}\frac{4y}{\left(1-y^2\right)^2}dy=\int\frac{1+y+y^2-y^3}{y\left(1-y^2\right)}dy$$

$$\int f(x)dx=\int\left(1+\frac{1}{y}+\frac{2y}{1-y^2}\right)dy=y+\ln|y|-\ln\left|1-y^2\right|+C$$

Finalement :

$$\int f(x)dx=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C$$

C est une constante réelle.

Remarque :

On trouve en fait : $\displaystyle\int f(x)dx=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left|x^2-1\right|}{2}+C$

On fait rentrer $-\dfrac{1}{2}\ln 2$ dans la constante.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Enoncé des exercices d'entraînement

Exercice (MATH08E10)

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin x \; dx$$

$$I_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \; dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{Arc\tan x}{1+x^2} dx$$

Exercice (MATH08E11)

Montrer que : $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) \; dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\frac{\pi}{4} - x))dx$

En déduire la valeur de $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x) \; dx$

Exercice (MATH08E12)

Calculer $I = \int_{-3/2}^{1/6} Arc\tan \frac{4x+1}{2x-2} \; dx$

Exercice (MATH08E13)

Calculer $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \ln(2x^2 - 2x + 5) \; dx$

Exercice (MATH08E14)

Calculer une primitive P de $x \mapsto \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$

Exercice (MATH08E15)

Calculer $I = \int_0^1 Arc\tan \sqrt{1-x^2} \; dx$

Solution **(MATH08E10)**

- Pour $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin x \, dx$

On reconnaît la forme $-u^4 u'$ dont une primitive est $-\frac{1}{5}u^5 + C$

donc : $I_1 = \left[-\cos^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}$

- *Pour* $I_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$

On reconnaît la forme $-\frac{u'}{u}$ dont une primitive est $-\ln|u| + C$

donc : $I_2 = \left[-\ln|\cos x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$

- *Pour* $I_3 = \int_0^1 \frac{Arc\tan x}{1+x^2} dx$

On reconnaît la forme $u\,u'$ dont une primitive est $\frac{1}{2}u^2 + C$

Donc : $I_3 = \left[\frac{1}{2} Arc\tan^2 x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}$

Retour

Solution (MATH08E11)

- On rappelle que $\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)$

La fonction $t \mapsto \frac{\pi}{4}-t$ est bijective sur R

Posons : $x=\frac{\pi}{4}-t$

$alors \;\; dx=-dt$

$si \;\; x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$si \;\; x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=0$

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,dx=-\int_{\pi/4}^{0} \ln(\cos(\frac{\pi}{4}-t)\,dt=\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\frac{\pi}{4}-t)\,dt$$

Puisque la variable d'intégration est muette, on a bien

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\;dx=\int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$$

- Calculons :

$$I=\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx=\int_0^{\pi/4} \ln(1+\frac{\sin x}{\cos x})dx=\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x+\sin x)\,dx-\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)dx$$

$$I=\int_0^{\pi/4} \ln(\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}-x))dx-\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,dx$$

$$I=\int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}\,dx+\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\frac{\pi}{4}-x)dx-\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}\,dx=\left(\ln\sqrt{2}\right)\int_0^{\pi/4} dx=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

Les deux intégrales restantes étant égales, leur différence est nulle, il reste donc

$$I=\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

Retour

Solution (MATH08E12)

On intègre par parties en posant :

$$u = Arc\tan\frac{4x+1}{2x-2} \quad \Rightarrow u' = \frac{\left(\dfrac{4x+1}{2x-2}\right)'}{1+\left(\dfrac{4x+1}{2x-2}\right)^2} = \frac{-2}{4x^2+1}$$

$$v = 1 \qquad\qquad \Rightarrow v' = 1$$

$$I = \int_{-3/2}^{1/6} Arc\tan\frac{4x+1}{2x-2}\,dx = \left[x\,Arc\tan\frac{4x+1}{2x-2}\right]_{-3/2}^{1/6} + 2\int_{-3/2}^{1/6}\frac{x\,dx}{4x^2+1}$$

$$I = \int_{-3/2}^{1/6} Arc\tan\frac{4x+1}{2x-2}\,dx = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln 3$$

Retour

Solution (MATH08E13)

Le trinôme du second degré $2x^2 - 2x + 5$ est toujours positif (du signe de a) car il possède un discriminant négatif. L'intégrale existe donc.

On effectue la décomposition canonique de ce trinôme

$$2\left[x^2 - x + \frac{5}{2}\right] = 2\left[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}\right] = \frac{9}{2}\left[\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 + 1\right]$$

On pose :

$$t = \frac{2x-1}{3} \quad ou \quad x = \frac{3t+1}{2}$$

avec $dx = \dfrac{3}{2}dt$

$$si \;\; x = \frac{1}{2} \quad alors \quad t = 0$$

$$si \;\; x = 2 \quad alors \quad t = 1$$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \ln\left[\frac{9}{2}\left(\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 + 1\right)\right] dx = \ln\frac{9}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} dx + \int_{0}^{1} \ln(1+t^2)\; dt$$

La dernière intégrale se calcule par parties

$$u = \ln(1+t^2) \;\Rightarrow\; u' = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$v = t \qquad\qquad \Rightarrow\; v' = 1$$

$$I = \frac{3}{2}\ln\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\left(\left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt\right)$$

$$= \frac{3}{2}\ln\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\left(\ln 2 - 2\left[t - Arc\tan t\right]_0^1\right) = \frac{3}{2}\ln\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

soit : $I = 3\ln 3 - 3 + \dfrac{3\pi}{4}$

Retour

Solution **(MATH08E14)**

L'ensemble définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x \cos^2 x}$ est la réunion des intervalles

$$I_k = \left]k\frac{\pi}{2},(k+1)\frac{\pi}{2}\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$$

Cette fonction admet des primitives sur tout intervalle I de l'ensemble de définition.

Nous avons affaire à une primitive de fraction rationnelle en sinus et cosinus.

$$\frac{1}{\sin(-x)\cos^2 x}d(-x) = \frac{1}{\sin x \cos^2 x}dx$$

L'invariant est donc –x : on pose t = cosx avec dt =–sinxdx

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)t^2}$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$-\frac{1}{(1+t)(1-t)t^2} = \frac{A_1}{t^2} + \frac{A_2}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$$

$$A_1 = -1 \quad A_2 = 0 \quad B = -\frac{1}{2} \quad C = -\frac{1}{2}$$

$$-\int \frac{dt}{(1-t^2)t^2} = -\int \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t}$$

$$-\int \frac{\mathrm{dt}}{(1-\mathrm{t}^2)\mathrm{t}^2} = \frac{1}{\mathrm{t}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}}\right| + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

où C est une constante réelle.

Retour

Solution (MATH08E15)

Cette intégrale est bien définie.

On effectue le changement de variable

$$x = \sin t$$
$$dx = \cos t \, dt$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$
$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \;\; Arc\tan(\cos t) \, dt$$

On intègre ensuite par parties

$$u = \arctan(\cos t) \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{-\sin t}{1+\cos^2 t}$$
$$v = \sin t \qquad\qquad \Rightarrow \quad v' = \cos t$$

$$I = \left[\sin t \;\; Arc\tan\,(\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t} \, dt$$

puisque $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 2 - (1 + \cos^2 t)$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos^2 t} - \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{d(\pi + t)}{1+\cos^2(\pi + t)} = \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$

l'invariant étant $(\pi + x)$, on pose donc : $s = \tan t$

On anticipe un peu sur le chapitre 9. On est ramené à une intégrale généralisée.

$$ds = \left(1 + \tan^2 t\right)dt \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{ds}{1+s^2}$$
$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 0$$
$$t \to \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad s \to +\infty$$

$$I = \lim_{k \to +\infty} \left(2\int_0^k \frac{ds}{\left(1+s^2\right)\left(1 + \dfrac{1}{1+s^2}\right)} - \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{k \to +\infty} \left(2\int_0^k \frac{ds}{2+s^2} - \frac{\pi}{2} \right)$$
$$= \lim_{k \to +\infty} \left(\sqrt{2}\left[Arc\tan \frac{s}{\sqrt{2}} \right]_0^k \right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi$$

Retour