Unité de mise à niveau

UMN01

Cette première unité de mise à niveau a pour but de vous remettre dans le bain du calcul littéral en faisant appel à des connaissances indispensables pour aborder le cycle complet des UMN. Nous vous demandons de vous référer à des livres scolaires des classes de secondes, premières et terminales scientifiques de lycée.

Vous serez surpris en abordant ces exercices de l'oubli presque total de vos connaissances mathématiques. Il est normal que vous éprouviez des difficultés devant des problèmes mêmes élémentaires. Il ne faut pas vous décourager trop rapidement. Le rythme revient en général assez vite.

N'hésitez pas à demander l'aide pédagogique par voie d'Internet.

1 Activités numériques

1.1 Ensembles de nombres

Les ensembles de nombres sont construits de façon progressive, chaque ensemble incluant le précédent et prolongeant ses règles de calcul.

Un ensemble est inclus dans un ensemble si et seulement si tout élément de est élément de .

L'introduction d'un nouvel ensemble de nombres se justifie afin de résoudre un problème insoluble dans le précédent.
Plusieurs démarches sont possibles pour expliquer la nécessité de « grossir » l'ensemble précédent.

Définition

L'ensemble de base est l'ensemble des entiers naturels qui permet de compter.

On le note : $=\{0\ 1\ 2\cdots \quad \cdots\}$.

On note $\quad = \quad - \{0\}$, l'ensemble privé de 0.

L'équation $\quad + 2 = 0$ n'admet pas de solutions dans N. On ressent la nécessité d'introduire un nouvel ensemble.

Définition

L'ensemble des entiers naturels est enrichi de tous les opposés. L'opposé de est le nombre $\ '$ tel que $\quad + \ ' = 0$. La réunion de tous les entiers et de leurs opposés forme l'ensemble des entiers relatifs.

On le note : $= \{\cdots -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ \cdots\}$

L'ensemble contient évidemment l'ensemble .

On note $= \ - \{0\}$, on généralisera cette notation à tout ensemble privé de 0.

On note $^{+} =$ l'ensemble des relatifs positifs et $^{-}$ l'ensemble des relatifs négatifs.

L'équation $3 \ = 2$ n'admet pas de solution dans cet ensemble : on construit alors un nouvel ensemble.

Définition

La construction de ce nouvel ensemble est plus compliquée.

Pour résoudre l'équation précédente on ressent la nécessité d'introduire le nombre tel que $a \times 3 = 1$ de telle sorte que $\times 3 \times \ =$ et ainsi $\times 3 \times \ = \ = \ \times 2$ qui donne une solution à l'équation.

On définit ainsi l'inverse du nombre non nul est le nombre $'$ tel que $' = 1$.

On construit un nouvel ensemble vérifiant que chaque nombre non nul possède un inverse. On bâtit ainsi l'ensemble des nombres rationnels noté . Chaque nombre rationnel peut s'écrire comme quotient de deux entiers.

$$= \left\{ - \qquad \neq 0 \right\}$$

Tout nombre entier peut être considéré comme un rationnel de dénominateur 1.

Pour mesurer une distance entre deux points, les grecs avaient déjà évoqué l'insuffisance des nombres rationnels. Par exemple la longueur de la diagonale d'un carré de longueur 1 ne peut se mettre sous la forme d'un quotient de deux entiers. Il faut donc d'autres nombres pour « boucher les trous ».

Définition

On complète l'ensemble des rationnels par un ensemble de nombres qui ne peuvent se mettre sous la forme d'un quotient d'entiers que l'on appelle les irrationnels, de telle sorte que l'on puisse mesurer toutes les distances de la droite. La construction de cet ensemble fait appel à des notions assez fines que nous ne pouvons évoquer maintenant. On le note ensemble des nombres réels.

$\sqrt{2}$ π sont des irrationnels.

On a les inclusions suivantes : $\subset \quad \subset \quad \subset$

D'une manière générale A étant un ensemble inclus dans R, on retiendra les notations suivantes :

$$= \quad -\{0\}$$

$$^{+} = \{ \quad \in \quad \geq 0\}$$

$$^{-} = \{ \quad \in \quad \leq 0\}$$

Le dernier ensemble que nous comptons introduire et que nous présenterons dans un prochain chapitre est l'ensemble des nombres complexes.

1.2 Calcul dans *R*

On rappelle les règles suivantes :

Propriétés

R1-Pour tous réels , , et , on a :

1 $+ \; = \; +$ $\qquad \times \; = \; \times$

(Commutativité des lois addition et multiplication, on dit que l'addition et la multiplication sont commutatives)

2 $+(\; + \;) = (\; + \;) +$ $\qquad \times(\; \times \;) = (\; \times \;) \times$

(Associativité, on dit que l'addition et la multiplication sont associatives)

3 $(\; + \;) = \quad +$

(Distributivité de la multiplication sur l'addition)

Bien différentier les deux transformations :

$$(\ + \ ) \rightarrow \quad + $$
$$+ \quad \rightarrow (\ + \ )$$

Exemple

Développer :

$$5(3 \quad -1) = 5 \times 3 \quad -5 \times 1 = 15 \quad -5$$

$$\begin{aligned}(3 \quad -1)(4 \quad +3) &= 3 \quad (4 \quad +3) - 1(4 \quad +3) \\ &= 3 \quad \times 4 \quad +3 \quad \times 3 - 1 \times 4 \quad -1 \times 3 \\ &= 12 \quad ^2 + 9 \quad -4 \quad -3\end{aligned}$$

Nous pourrons « sauter » le premier intermédiaire.

Factoriser :

$$12 \quad +18 = 6(2 \quad +3)$$

$$4 \quad ^3 + 6 \quad ^2 - 2 \quad = 2 \quad (2 \quad ^2 + 3 \quad -1)$$

Propriétés

R2-Pour tous réels , , et avec et différents de 0, on a : $\frac{}{} = \frac{}{}$

Exemple

$$= \frac{(\quad -1)(\quad +1)}{-1} = \quad +1$$

$$= \frac{^2 + 2}{+2}$$

Vous ferez attention que le domaine de définition de est l'ensemble des réels privé de 1, ce qui n'est plus apparent après simplification.

n'est pas simplifiable car aucun facteur commun n'apparaît au numérateur et au dénominateur.

$= \frac{12 \quad ^2 + 5 \quad -3}{15 \quad -5}$, en utilisant les résultats ci-dessus, on obtient :

$$= \frac{12 \quad ^2 + 5 \quad -3}{15 \quad -5} = \frac{(3 \quad -1)(4 \quad +3)}{5(3 \quad -1)} = \frac{4 \quad +3}{5}$$

De nouveau la valeur interdite $\frac{1}{3}$ n'est plus apparente sur la forme simplifiée.

1.3 Puissance d'un réel.

Définition

Soit un réel et un entier naturel non nul. On appelle puissance ième de et on note le produit $\underbrace{\times \ \times \cdots \times}$. On a $^{1} =$

Si de plus $\neq 0$ alors on pose par définition $^{0} = 1$

Propriétés

Soient les réels non nuls et et les entiers naturels non nuls et .

$\times \quad = \quad ^{+}$

$(\quad) \quad =$

$\times \quad = (\quad)$

$\left(- \right) = —$

La convention $^{0} = 1$ permet d'étendre à tous les entiers les propriétés ci-dessus, en particulier : $a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$

Posons $^{-} = \frac{1}{}$

On a : $a^{-n}a^n = a^n \times \frac{1}{a^n} = 1 = a^0$

Ce qui permet de respecter encore les règles de calcul.

On vient donc de définir pour entier relatif. Les propriétés ci-dessus restent valables.

Exemple

$$= \frac{2^4 3^{-5} 7^2}{2^2 3^{-4} 7} = 2^{4-2} 3^{-5+4} 7^{2-1} = \frac{2^2 7}{3} = \frac{28}{3}$$

Vous pourrez écrire le calcul ci-dessus en essayant de repérer à chaque étape la propriété utilisée.

Identités remarquables

$$(\ \ +\ \ )^2 = \ ^2 + 2\ \ \ + \ ^2$$
$$(\ \ -\ \ )^2 = \ ^2 - 2\ \ \ + \ ^2$$
$$\ ^2 - \ ^2 = (\ \ -\ \ )(\ \ +\ \ )$$
$$(\ \ +\ \ )^3 = \ ^3 + 3\ ^2\ \ + 3\ \ ^2 + \ ^3$$
$$(\ \ -\ \ )^3 = \ ^3 - 3\ ^2\ \ + 3\ \ ^2 - \ ^3$$
$$\ ^3 + \ ^3 = (\ \ +\ \ )(\ ^2 - \ \ \ + \ ^2)$$
$$\ ^3 - \ ^3 = (\ \ -\ \ )(\ ^2 + \ \ \ + \ ^2)$$

Les formules de factorisation sont à savoir par coeur.

Exemple

Soit définie par $(\ \ ) = \dfrac{\ ^3 - 8}{\ \ - 2}$

Nous allons simplifier l'expression de .

Il faut tout d'abord s'intéresser à son ensemble de définition.

$$= \{\ \ \in\ \ /\ (\ \ - 2) \neq 0\} = \ \ - \{2\}$$

$$(\ \ ) = \frac{\ ^3 - 8}{\ \ - 2} = \frac{(\ \ - 2)(\ ^2 + 2\ \ + 4)}{(\ \ - 2)} = (\ ^2 + 2\ \ + 4)$$

On écrira $(\ \ ) = (\ ^2 + 2\ \ + 4)$ sur son ensemble de définition.

1.4 Racine carrée

Soit un réel positif il existe un réel unique noté $\sqrt{a}$ tel que son carré soit égal à
 .

En langage mathématique :

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Attention, la deuxième condition est nécessaire.

En effet $a^2 = b^2$ n'entraîne pas $a = b$.

Propriétés

Pour tous les réels positifs a et b :

R3-On peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un réel strictement positif sans changer le sens de celle-ci.

R4-On peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un réel strictement négatif, mais il faut alors changer le sens de celle-ci.

R5-On peut multiplier membre à membre deux inégalités dont tous les termes sont positifs.

R6-pour tous les réels   et   non nuls et de même signe:

$$< \quad \Rightarrow \frac{1}{\ } < \frac{1}{\ }$$

Toute autre manipulation doit être faite avec soin et si possible en se ramenant aux cas précédents.

Exemple

On considère deux réels   et   qui vérifient les encadrements suivants :

$$-5 < \quad < -1 \qquad 5 < \quad < 7.$$

On se propose de donner un encadrement des $+$

Pour la somme cela ne pose aucun problème, il suffit d'additionner membre à membre les deux inégalités.

$-5 < \quad < -1 \qquad 5 < \quad < 7$

$-5 + 5 < \quad + \quad < -1 + 7 \Leftrightarrow 0 < \quad + \quad < 6$

Pour le produit, il faut se ramener à des inégalités de termes positifs.

$-5 < \quad < -1 \Leftrightarrow 1 < - \quad < 5 \qquad 5 < \quad < 7$

$1 \times 5 < (- \quad) \quad < 5 \times 7 \Leftrightarrow 5 < - \quad < 35 \Leftrightarrow -35 < \quad < -5$

Remarque

Il existe une méthode générale, efficace et automatique pour les encadrements de produits quelles que soient les bornes.

$< \quad <$

$< \quad <$

On effectue tous les produits , , . L'encadrement de a pour borne inférieure le plus petit de ces nombres et pour borne supérieure le plus grand.

Si on suppose de plus que $0 \notin [\ ;\ ]$**,** on effectue tous les rapports $-,-,-,-$.

L'encadrement de $-$ a pour borne inférieure le plus petit de ces nombres et pour borne supérieure le plus grand.

Exemple

$-7 < \quad < 5$

$-3 < \quad < 2$

On veut encadrer

On a $(-7)(-3) = 21, (-7)(2) = -14,\ 5(-3) = -15 \quad 5 \times 2 = 10$

On en déduit : $-15 < \quad < 21$

Exemple

$-7 < \quad < 5$

$-3 < \quad < -2$

On veut encadrer $-$

On a de même : $\dfrac{-7}{-3}, \dfrac{-7}{-2}, \dfrac{5}{-3}, \dfrac{5}{-2}$

On en déduit : $-\dfrac{5}{2} < - < \dfrac{7}{2}$

Vous remarquerez que l'énoncé pour l'encadrement de $-$ a changé. Il fallait éviter que ne s'annule.

Exercice **(MATH01E01A)**

On donne $-2{,}5 < \quad < 3{,}5 \qquad -5 < \quad < -1$

Donner le meilleur encadrement possible de

1) $- \quad , - \quad , \quad ^2, \quad ^2, \quad ^2 + \quad ^2$

2) $-\frac{1}{\quad}, -\frac{\quad ^2 + \quad ^2}{\quad}$

1.6 Valeur absolue

Définition

La distance entre deux réels et est la distance entre les points d'abscisses et de la droite numérique.

On la note $(\ ,\ )$

Si $\quad \leq \quad$ alors $(\ ,\ ) = \quad - \quad$

Si $\quad \geq \quad$ alors $(\ ,\ ) = \quad - \quad$

Exemple

$(3\ -5) = 3 - (-5) = 3 + 5 = 8$

La valeur absolue d'un réel (notée $|\quad|$) est la distance de à 0.

Si $\quad \leq 0$ alors $(\ ,0) = |\quad| = 0 - \quad = -$

Si $\quad \geq 0$ alors $(\ ,0) = \quad - 0 =$

Pour résumer :

$$|\quad| = \begin{cases} \quad & \geq 0 \\ - \quad & \leq 0 \end{cases}$$

On peut écrire aussi : $|\quad| = \quad (\ ,-\ )$

Propriétés

- $|\quad| = |\quad| |\quad|$

- $\neq 0 \qquad \left|\frac{1}{\quad}\right| = \frac{1}{|\quad|} \qquad \left|\frac{\quad}{\quad}\right| = \frac{|\quad|}{|\quad|}$

- Inégalité triangulaire :

$|x+y| \leq |x|+|y|$

On se sert beaucoup de cette inégalité lorsque l'on veut majorer une expression.

- Pour tout réel , on a : $\sqrt{x^2} = |x|$

- $| \ | = \ \Leftrightarrow \begin{cases} \geq 0 \\ = \qquad = - \end{cases}$

Exemple

$|2 \ -8| = 4 \Leftrightarrow 2 \ -8 = 4 \qquad 2 \ -8 = -4$

$\Leftrightarrow \ = 6 \qquad = 2$

Exemple

) (≥−2560(−)]Tϑ −1 24 −26.5 TΔ≥1 251 Tγ≥[(−ξ)−5780<)

2 Second degré

2.1 Fonction trinôme

Définition

Soient trois réels , et avec non nul. On appelle fonction trinôme ou fonction du second degré, la fonction définie sur R par :

$$(\quad) = \quad^2 + \quad + $$

On peut mettre sous forme canonique (canon = modèle, on parle de canon de la beauté) cette fonction ou ce trinôme du second degré.

$$(\quad) = \quad^2 + \quad + \quad = \left(\quad + \frac{}{2}\right)^2 - \frac{^2}{4} + $$

$$= \left(\quad + \frac{}{2}\right)^2 - \frac{^2 - 4}{4}$$

Exemple

$$(\quad) = 2\quad^2 + \quad - 3 = 2\left(\quad^2 + \frac{1}{2}\quad\right) - 3 = 2\left(\quad + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} - 3$$

$$= 2\left(\quad + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

En pratique on factorise le coefficient de ^{2}, puis on considère $^2 + \frac{}{}$ comme le début du carré $\left(\quad + \frac{}{2}\right)^2$ auquel on retranche le carré $\left(\frac{}{2}\right)^2 = \frac{^2}{4\quad^2}$.

2.2 Équation du second degré.

On veut résoudre dans R l'équation du second degré :

$$\quad^2 + \quad + \quad = 0 \qquad\qquad \neq 0$$

En reprenant la fonction trinôme définie ci-dessus, cela revient à résoudre l'équation : $(\ ) = 0$, soit à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction avec l'axe des abscisses.

En utilisant la forme canonique de , cela donne :

$$\left(+ \frac{}{2}\right)^2 - \frac{^2 - 4}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(+ \frac{}{2}\right)^2 = \frac{^2 - 4}{4\ ^2}$$

Définition

On pose par définition $\Delta = \ ^2 - 4$, discriminant du trinôme.

On peut donc en déduire les résultats suivants :

Théorème

Soit $^2 + \ + \ = 0 \qquad \neq 0$

Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution réelle

Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double $_0 = -\frac{}{2}$

Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes :

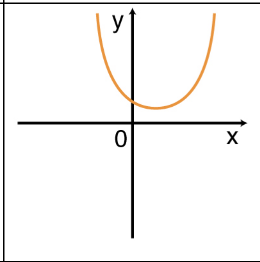
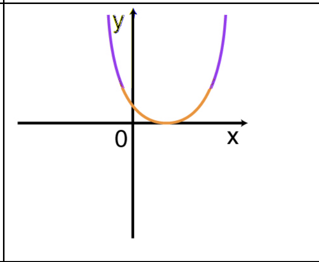
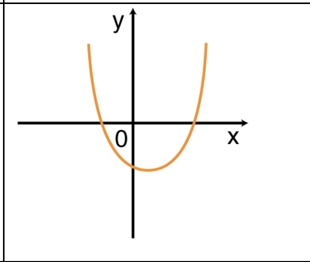
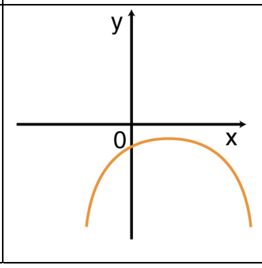
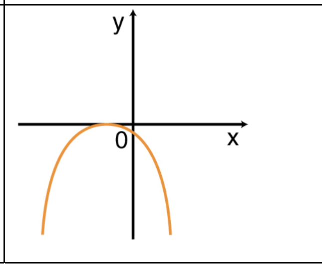
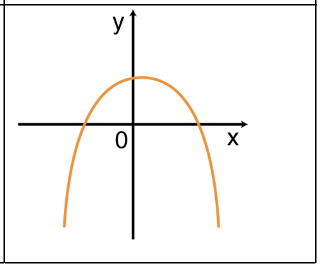
$$_1 = \frac{- \ - \sqrt{\Delta}}{2} \qquad _2 = \frac{- \ + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$

Ce théorème se démontre très facilement à partir de la forme canonique du trinôme. Nous laissons le soin au lecteur de mettre en place cette démonstration.

La courbe représentative de la fonction notée est une parabole.

On obtient les six cas suivants :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
> 0			
< 0			

- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme n'est pas factorisable sous forme d'un produit de facteurs du premier degré en . On le savait car il aurait eu alors des racines réelles.

  $$^2 + \quad + \quad = \left(\left(\quad + \frac{\quad}{2} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4 \quad ^2} \right).$$

  Le trinôme est du signe de quel que soit .

- Si $\Delta = 0$ alors $^2 + \quad + \quad = \left(\quad + \frac{\quad}{2} \right)^2 - \frac{^2 - 4}{4} = \left(\quad + \frac{\quad}{2} \right)^2$; voilà pourquoi on parle de racine double. On peut remarquer que le trinôme est du signe de .

- Si $\Delta > 0$ alors $\left(\left(\quad + \frac{\quad}{2} \right)^2 - \frac{^2 - 4}{4 \quad ^2} \right) = \quad (\quad - \quad _1)(\quad - \quad _2)$. Le trinôme est alors du signe de à l'extérieur des racines.

$$_1 = \frac{- \quad - \sqrt{\Delta}}{2} \qquad\qquad _2 = \frac{- \quad + \sqrt{\Delta}}{2}$$

On remarque que :

$$= {}_1 + {}_2 = \frac{-}{}$$

$$= {}_1\,{}_2 = -$$

Exemple

On résout :

$$+ \qquad - \quad =$$

$$\Delta \qquad - 4(-2)341 = 5329 = 73^2$$

$${}_1 = \frac{-51-73}{682} = -\frac{2}{11} \qquad\qquad {}_2 = \frac{-51+73}{682} = \frac{1}{31}$$

Exercice **(MATH01E02A)**

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 - 4x - 77 = 0$

2) $1431x^2 - 35576x - 677567 = 0$

3) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} = 1$

4) $x^2 - (m+1)x + m = 0$ (Discuter suivant les valeurs de m)

3 Calcul Algébrique

3.1 Développer, réduire et ordonner.

Définition

- **Développer**, c'est effectuer les produits d'expressions entre parenthèses.
- **Réduire**, c'est effectuer les sommes algébriques de même nature
- **Ordonner** suivant les puissances croissantes de x, c'est écrire dans l'ordre le terme constant, puis le terme en « », puis le terme en ^{2}, etc…

  On peut aussi ordonner dans l'ordre décroissant.

Définition

Une fonction définie par $\mapsto \;_0 + \;_1 + \;_2\;^2 + \cdots +$ s'appelle une fonction polynôme ou tout simplement un polynôme de degré . Chacun des termes s'appelle un monôme de degré .

Exemple

Soit le polynôme défini par : $(\ ) = \sqrt{2}\;^5 + 8\;^5 - \;^5 - 3\sqrt{2}\;^5$

Commençons par le réduire $(\ ) = (7 - 2\sqrt{2})\;^5$

calculons la valeur numérique du résultat pour $\in \left\{ - \quad - \quad \sqrt{\ } \right\}$

$$(-\ ) = (\ -\ \sqrt{\ })(-\ ) = -7 + 2\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{3}{\ }\right) = (\ -\ \sqrt{\ })\left(-\right)^3 = (\ -\ \sqrt{\ })\frac{2 \quad 4 \quad 3}{1 \quad 0 \quad 2 \quad 4}$$

$$(\sqrt{\ } = \ ) - \sqrt{\ } \;(\sqrt{\ } = 25\ 7) + 2\sqrt{2}(\sqrt{5} \quad) \qquad (\qquad)$$

Exercice (MATH01E03A)

Réduire les monômes et calculer la valeur numérique du résultat pour

$\in \left\{ - \quad - \quad \sqrt{\ } \right\}$

$+ \quad - \quad -$

$-- \quad +- \quad +- \quad --$

V é r i f i e r l e s r é s u l t a t s à l ' a i d e d e

Exemple

Soit définie par : $- \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$

Développons le pol

$$(\quad = (\ )^2 - 2\ +1)^2 + \;^3 - 3\;^2 + 3\ -1 + \;^2 - 2\ +1 + \ -1 + 1$$

$$= \;^4 - 4\;^3 + 6\;^2 - 4\ +1 + \;^3 - 3\;^2 + 3\ -1 + \;^2 - 2\ +1 + \ -1 + 1$$

Réduisons tout donnons

Exemple

$$+ \quad -$$

$$= \quad + \quad + \quad - \quad = \quad + \quad -$$

$$= \quad + \quad - \quad + \quad + \quad = \quad - \quad +$$

$$- \quad - \quad +$$

$$= (\quad - \quad - \quad + \quad)(\quad - \quad + \quad + \quad)$$

$$- \quad - \qquad - \quad -$$

$$- \quad {}^4 - 2 \quad {}^2 + 1 \; = \quad +1 \; {}^4 - \quad {}^2 - 1 \; {}^2$$

$$= \quad +1 \; {}^4 - \quad -1 \; {}^2 (\quad +1)^2 = \quad +1 \; {}^2 \quad +1 \; {}^2 - \quad -1 \; {}^2$$

$$= 4 \quad +1 \; {}^2$$

Pour , il s'agit du principe de la factorisation canonique

Exercice **(MATH01E05A)**

Factoriser

$$- \qquad -$$

$$- \quad +$$

$$- \quad -$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad -$$

On pourra utiliser les identités remarquables usuelles

4 Inéquations et systèmes simples

4.1 Inéquations

On se contentera dans ce paragraphe de donner quelques exemples traités.

Exemple

On veut résoudre dans l'inéquation suivante : $- \quad \leq$

On est ramené à l'étude du signe d'un trinôme, signe de $= 6 > 0$ à l'extérieur des racines ce qui donne : $= \left[- - \quad - \right]$

On veut résoudre dans l'inéquation suivante : $\frac{}{-} < \frac{+}{-}$

<u>Règle d'or</u> :

En préalable à tout problème algébrique, on cherche l'ensemble de définition.

Pour résoudre une inéquation, il est conseillé de faire passer tous les éléments dans le même membre et de factoriser celui-ci.

On fait passer tout dans le même membre et on réduit au même dénominateur

$$\frac{}{-} - \frac{+}{-} < \quad \Leftrightarrow \quad \frac{- \quad - \qquad -}{- \quad -} < \quad \Leftrightarrow \quad \frac{- \quad + \quad -}{- \quad -} <$$

Le discriminant du numérateur est négatif d'où le trinôme est du signe de $= -1$ donc négatif.

Le dénominateur est négatif entre les racines, donc on obtient $= \left]-\infty \ 1\right[\cup \left]2 \ +\infty\right[$.

Vous pouvez faire un tableau de signe qui simplifie la discussion.

	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-\ ^2 + \ -1$		$-$		$-$		$-$	
$(\ -1)(\ -2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
	$-$		$+ \Vert$		$- \Vert$		

Vous ferez attention de bien exclure les bornes, car les valeurs 1 et 2 annulent le dénominateur.

Exemple

$= \{\ \in \qquad ^2 + \ +1 \geq 0\} =$, en effet le dicriminant du trinôme est négatif donc celui-ci est du signe de donc positif.

$$- > \sqrt{\quad + \quad +} \Leftrightarrow \quad - \geq \qquad - \quad > \quad + \quad +$$

$$\Leftrightarrow \quad \geq - \qquad - \qquad\qquad + \quad +$$

$$\Leftrightarrow \quad \geq - \qquad -$$

En utilisant le signe du trinôme, on trouve : $= \left] - \; +\infty \right[$.

Il faut impérativement dans ce cas particulier s'assurer que le terme de gauche est positif, car après l'élévation au carré, le signe est perdu.

Exercice **(MATH01E06A)**

Résoudre dans

$$\leq \frac{-}{+} \leq \qquad\qquad \begin{cases} \leq \\ + \geq \quad + \\ + < \end{cases}$$

4.2 Systèmes linéaires.

Nous étudierons ultérieurement et de façon plus approfondie les systèmes linéaires. Nous donnons ici quelques exemples de résolution simple.

Elle consiste à exprimer une variable en fonction de l'autre dans une des équations, puis à remplacer celle-ci dans la deuxième par l'expression trouvée. Nous vous laisserons utiliser cette méthode si vous le désirez, sachant que la rédaction doit rester rigoureuse.

Vous vous efforcerez de remplacer à chaque étape le système précédent par un système équivalent, c'est à dire qui possède les mêmes solutions.

Exemple

Nous allons résoudre dans $\times$ le système suivant par la méthode de substitution :

$$\begin{cases}3x+2y=9\\7x-5y=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9-2y}{3}\\7\times\dfrac{9-2y}{3}-5y=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-\dfrac{2y}{3}\\-\dfrac{14}{3}\quad-5\quad=50-21\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-\dfrac{2y}{3}\\-\dfrac{29}{3}\quad=29\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-\dfrac{2(-3)}{3}\\\quad=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\quad=-3\end{cases}$$

$$=\{(5\ \ -3)\}$$

Exemple

Nous allons résoudre dans $\times$ le système suivant en utilisant un changement de variables.

$$=\{(\quad)\in\ \ \times\quad\neq 1\quad\quad\neq 2\}$$

$$\begin{cases}\dfrac{4}{\ -1}+\dfrac{5}{\ -2}=13\\\dfrac{2}{\ -1}-\dfrac{1}{\ -2}=17\end{cases}$$

On pose : $\begin{cases}\ =\dfrac{1}{\ -1}\\\ =\dfrac{1}{\ -2}\end{cases}$

Le système devient :

$$\begin{cases}4\quad+5\quad=13\\2\quad-\quad=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\quad+5\quad=13\\\quad 7\quad=-21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ =7\\\ =-3\end{cases}$$

On revient alors aux variables et

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\ -1}=7\\\dfrac{1}{\ -2}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ =\dfrac{8}{7}\\\ =\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

$$=\left\{\left(\frac{8}{7}\ \ \frac{5}{3}\right)\right\}$$

On vérifie que les solutions conviennent.

Notez bien que lorsque l'on considère un système à deux inconnues, le résultat trouvé est un couple de réels alors que si l'on résout l'équation à une inconnue : $(8\quad-7)(5\quad-3)=0$, on trouve deux solutions $\ =\dfrac{8}{7}$ ou $\ =\dfrac{5}{3}$.

Exercice (MATH01E07A)

Résoudre dans $\times$

$$\begin{cases} - \quad = \\ \quad + \quad = \end{cases}$$

Définition

On appelle système triangulaire un système de la forme :

$$\begin{cases} 2 \ -3 \ +4 \ =8 \\ \quad 7 \ -2 \ =4 \\ \quad\quad 3 \ =15 \end{cases}$$

La résolution de ce système est très simple, on calcule dans la troisième équation , puis en utilisant la valeur trouvée, on calcule dans la deuxième, et enfin dans la première.

$$\begin{cases} 2 \ -3 \ +4 \ =8 \\ \quad 7 \ -2 \ =4 \\ \quad\quad 3 \ =15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \ -3 \ +4 \ =8 \\ 7 \ -2\times 5=4 \\ =5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \ -3\times 2+4\times 5=8 \\ =2 \\ =5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} =-3 \\ =2 \\ =5 \end{cases}$$

La méthode du pivot de Gauss consiste à ramener tout système à un système triangulaire si cela est possible.

Exemple

$$\begin{cases} \quad - \quad + \quad = \\ \quad + \quad - \quad = \\ - \ + \quad + \quad = \end{cases} \qquad \left(\quad \right) \Leftrightarrow \quad - \quad + \quad =$$

Remarque

Le nombre d'étapes dépend du nombre d'équations et de variables.

La méthode est itérative et peut se généraliser à équations à inconnues.

Les étapes successives donnent des systèmes équivalents.

L'écriture des enchaînements est ainsi parfaitement rigoureuse.

Exercice **(MATH01E08A)**

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \quad + \quad + \quad = 72\,5 \\ \frac{}{25} + \frac{}{14} + \frac{}{35} = \frac{17}{5} \\ \frac{}{25} + \frac{}{35} + \frac{}{14} = \frac{31}{10} \end{cases}$$

5 Compléments

5.1 Raisonnement par récurrence :

Il est courant en mathématiques d'avoir des propositions qui dépendent d'un entier .

Par exemple : $1 + 2 + 3 + \cdots + \quad = \frac{(\quad +1)}{2}$

On appellera cette proposition $(\ )$. Ici indique son ordre.

$(1) \quad 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$ est vérifiée. On dira que (1) est vraie.

L'idée de la démonstration par récurrence est relativement naturelle, elle consiste à dire que si une propriété est vérifiée « au début » et qu'une étape entraîne la suivante, alors la propriété est vraie partout. Encore faut-il faire les choses soigneusement.

Théorème

Si (0) est vraie et si pour tout entier naturel $(\ )$ entraîne $(\ +1)$ alors la propriété est vraie pour tout entier naturel

Nous nous apercevons que nous ne pouvons utiliser ce théorème pour démontrer la proposition de l'exemple introductif. En effet celle-ci n'a de sens qu'à partir de $=1$.

Théorème

Soit l'entier naturel $_0$.

Si $(\ _0)$ est vraie et si pour tout entier naturel $\geq\ _0$ $(\ )$ entraîne $(\ +1)$ alors la propriété est vraie pour tout entier naturel $\geq\ _0$

En pratique, cela revient à montrer que $(\ +1)$ est vraie en utilisant le fait que $\forall\ \ _0 \leq\ \leq$ $(\ )$ est vraie (hypothèse de récurrence)

Exemple

Démontrons la proposition précédente :

$$(\ ) \qquad 1+2+\cdots+\ = \frac{(\ +1)}{2} \qquad \geq 1$$

Il est important de bien définir la proposition que l'on considère.

(1) est vraie (déjà vu)

On suppose que $\forall\ \leq$ $(\ )$ est vraie.

Considérons $1+2+\cdots+\ +(\ +1)$

En utilisant $1+2+\cdots+\ = \dfrac{(\ +1)}{2}$ qui est vraie par hypothèse de récurrence.

On obtient :

$$1+2+\cdots+\ +(\ +1) = \frac{(\ +1)}{2} + \ +1 = \frac{(\ +1)+2(\ +1)}{2} = \frac{(\ +1)(\ +2)}{2}$$

Qui prouve que $(\ +1)$ est vraie.

Donc la proposition est vraie pour tout ≥ 1

Remarque

On utilisera la notation suivante : $\sum_{=1} \ = 1+2+\cdots+$

Exercice **(MATH01E09A)**

Démontrer par récurrence le résultat suivant :

$$1+2^2+3^2+\cdots+\ ^2=\frac{(2\ +1)(\ +1)}{6}$$

5.2 Combinatoire et formule du binôme

Nous verrons plus tard dans le chapitre sur le dénombrement introductif au calcul des probabilités une approche plus approfondie des notions présentées ici.

Dans tout ce qui suit   est un entier naturel non nul.

Définition

On appelle -uplet un ensemble de   éléments ordonnés. Nous adopterons la notation suivante : $(\ _1\ \ _2\ \cdots\ \ )$.

Etant donnés   éléments distincts, on appelle permutation de ces   éléments, tout -uplet ordonné de ces   éléments.

Soit l'ensemble $\ =\{\qquad\}$, il y a 6 permutations distinctes.

$(\qquad)\ (\qquad)\ (\qquad)\ (\qquad)\ (\qquad)\ (\qquad)$

Dans un ensemble de   éléments distincts, il y a   choix possibles pour le premier élément du -uplet, puis $\ -1$ choix pour le deuxième etc…

Soit au total : $(\ -1)(\ -2)\cdots 2\times 1$, produit des   premiers entiers.

On note ce nombre ! et on dit « factorielle   ou « -factorielle ».

$6\ \ =6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

Par définition nous poserons : $0\ \ =1$

Exemple

Simplifions : $\frac{6\ \ 3}{7\ \ 2} = \frac{6\ (3\times 2\ \ )}{(7\times 6\ \ )2} = \frac{3}{7}$

D'une manière générale :

$\frac{(\ \ +1)}{\ } = \frac{(\ \ +1)}{\ } = \ \ +1$

$\frac{(\ \ +\ \ )}{\ } = (\ \ +\ \ )(\ \ +\ \ -1)\cdots(\ \ +1)$

Définition

Soit E un ensemble comprenant   éléments distincts. On dira que le cardinal de   est   et on écrira : $=$.

Soit   un entier naturel vérifiant : $0 < \ \ \leq$

On appelle arrangement de   éléments de , tout -uplet d'éléments de   distincts deux à deux.

Exemple

$\ = \{\ \ \ \ \}$

$(\ \ )\ (\ \ )$ sont des arrangements de 2 éléments de . Ici, il y a une notion d'ordre. $(\ \ ) \neq (\ \ )$

Il y a   choix pour le premier, $-$ pour le deuxième … et $-$ pour le ième.

Le nombre d'arrangements de   éléments d'un ensemble de   éléments est noté : $(\ \ )$ avec : $\ = \ \times(\ \ -1)\cdots(\ \ -\ \ +1) = \frac{\ }{(\ \ -\ \ )}$

Dans l'exemple précédent, le nombre d 'arrangement de 2 éléments parmi 4 est donc : ${}^{2}_{4} = 4\times 3 = 12$. Vous pouvez mettre ce résultat en évidence.

Définition

On suppose ≤

On appelle combinaison de éléments parmi éléments distincts, tout sous ensemble de éléments choisis parmi ces .

Exemple

$= \{ \quad \}$

$\{ \quad \}$ $\{ \quad \}$ sont des combinaisons de 3 éléments de

On note le nombre de combinaisons de éléments parmi . A chaque combinaison de éléments correspond ! arrangements de ces mêmes éléments.

$$= \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{(\; - \;)}$$

$= \quad {}^{-1}_{-1} + \quad {}_{-1}$

: on isole un élément des éléments. On constitue les combinaisons contenant cet élément et celles ne le contenant pas. Les premières sont au nombre de ${}^{-1}_{-1}$ cela revient à choisir les -1 manquants parmi les -1 restants. Les autres sont au nombre de ${}_{-1}$ cela revient à choisir les éléments parmi les -1 restants.

On va représenter les de façon matricielle.

	0	1	2	3	4	5
0	${}^{0}_{0}$					
1	${}^{0}_{1}$	${}^{1}_{1}$				
2	${}^{0}_{2}$	${}^{1}_{2}$	${}^{2}_{2}$			
3	${}^{0}_{3}$	${}^{1}_{3}$	${}^{2}_{3}$	${}^{3}_{3}$		

....etc

se trouve à l'intersection de la ligne et de la colonne .

En remarquant que ${}^{0} = 1$ pour tout et en utilisant la propriété de récurrence $= \quad {}^{-1}_{-1} + \quad {}_{-1}$ on construit rapidement le triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Exemple

Cela donne les coefficients dans la formule du binôme (ligne 5)

$$(\ \ +\ \ )^5 = 1\times\ {}^{0}\ {}^{5} + 5\times\ {}^{1}\ {}^{4} + 10\times\ {}^{2}\ {}^{3} + 10\times\ {}^{3}\ {}^{2} + 5\times\ {}^{4}\ {}^{1} + 1\times\ {}^{5}\ {}^{0}$$

Exercice **(MATH01E10A)**

Montrer par récurrence le résultat :

$$\forall\ \ \in\ \ \ \geq 1\quad \sum_{=1}\quad = \quad +1\quad -1$$

Exercice (MATH01E11)

Déterminer le réel m pour que l'équation bicarrée

$$x^4 - (3m+4)x^2 + m^2 = 0$$

ait quatre racines en progression arithmétique.

Exercice (MATH01E12)

Soient deux entiers n et p vérifiant : $0 < p < n$

1) Montrer par récurrence sur n que : $\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$

2) Ecrire ces égalités pour $p = 2 \quad et \quad p = 3$

3) En déduire les sommes :

$$S_2{}' = 1.2 + 2.3 + \ldots\ldots + (n-1)n$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2$$
$$S_3{}' = 1^2.2 + 2^2.3 + \ldots\ldots + (n-1)^2 n$$
$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + n^3$$

Exercice (MATH01E13)

Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + y + z + t = -4 \\ x + 2y + z + t = -5 \\ x + y + 2z + t = 9 \\ x + y + z + 2t = -10 \end{cases}$$

Exercice

a

$$\frac{x-a}{x-\ a}=\frac{x-}{x-}$$

Exercice

$) \quad x+\sqrt{x\ \ +\ \ x}=$

$) \sqrt{x\ \ +\ \ x+\ \ }=x-a$

Solution **(MATH01E11)**

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les 4 racines, elles sont opposées 2 à 2, donc

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

De plus

$$x_2 = x_1 + r, \quad x_3 = x_1 + 2r, \quad x_4 = x_1 + 3r$$

donc

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + (x_1 + r) + (x_1 + 2r) + (x_1 + 3r) = 4x_1 + 6r = 0$$

On en déduit $x_1 = -\frac{3}{2} r$

et les racines sont donc $-\frac{3}{2} r, \quad -\frac{1}{2} r, \quad \frac{1}{2} r, \quad \frac{3}{2} r$

Les deux solutions de l'équation

$X^2 - (3m+4)X + m^2 = 0$ sont $\frac{1}{4} r^2$ et $\frac{9}{4} r^2$

On a donc $\begin{cases} \frac{1}{4} r^2 + \frac{9}{4} r^2 = \frac{10}{4} r^2 = 3m + 4 & (1) \\ \frac{1}{4} r^2 \cdot \frac{9}{4} r^2 = \frac{9}{16} r^4 = m^2 & (2) \end{cases}$

on utilise somme et produit des racines. De (1) et (2) on tire :

$$m^2 = \frac{9}{16} \left(\frac{4}{10} (3m+4) \right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = \frac{9}{100} (9m^2 + 24m + 16)$$

doù $m_1 = 12$ et $m_2 = -\frac{12}{19}$

Premier cas: $m = 12 \quad S = \{-6; -2; 2; 6\}$

(mêmes solutions avec $r = 4$ ou $r = -4$)

Deuxième cas: $m = -\frac{12}{19} \quad S = \left\{ -\frac{6}{\sqrt{19}}; -\frac{2}{\sqrt{19}}; \frac{2}{\sqrt{19}}; \frac{6}{\sqrt{19}} \right\}$

(mêmes solutions avec $r = \frac{4}{\sqrt{19}}$ ou $r = -\frac{4}{\sqrt{19}}$)

Retour

Solution (MATH01E12)

1) Posons la proposition

$$P(n) \quad : \quad \sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$$

La proposition est vraie à l'ordre p

Supposons la proposition vraie $\forall k, \quad p \leq k \leq n$

Calculons : $\sum_{k=p}^{n+1} C_k^p$

$$\sum_{k=p}^{n+1} C_k^p = \sum_{k=p}^{n} C_k^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^p = C_{n+2}^{p+1}$$

Ce qui prouve $P(n+1)$. La proposition est donc vraie pour tout n

2) On a :

$C \quad C \quad C \qquad C \quad C \quad k$

$$1.2.3+2.3.4+\dots\dots+(n-2)(n-1)n=\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k-1)k\ =\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4}\quad (E)$$

La somme peut partir de la valeur $k=1$ puisque les deux termes ajoutés sont nuls :

Si on adopte une méthode similaire à la précédente :

$$\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k-1)k\ =\sum_{k=1}^{n}(k-1-1)(k-1)k\ =\sum_{k=1}^{n}(k-1)^{2}k-\sum_{k=1}^{n}(k-1)k$$

Donc on a :

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^{2}k=\sum_{k=1}^{n}(k-1)k+\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k-1)k\ =\frac{(n-1)n(n+1)}{3}+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4}$$

Finalement :

$$1^{2}.2+2^{2}.3+\dots\dots+(n-1)^{2}n=S_{3}'=\sum_{k=1}^{n}(k-1)^{2}.k=\frac{(n-1)n(n+1)(3n-2)}{12}$$

En développant :

$$S_{3}'=\sum_{k=1}^{n}(k-1)^{2}k=\sum_{k=1}^{n}k^{3}-2\sum_{k=1}^{n}k^{2}+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{(n-1)n(n+1)(3n-2)}{12}$$

et :

$$S_{3}=\sum_{k=1}^{n}k^{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)(3n-2)}{12}$$

$$=\frac{n^{2}(n+1)^{2}}{4}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{2}$$

Remarque

La relation $\sum_{k=2}^{n}C_{k}^{2}=C_{2}^{2}+C_{3}^{2}+\dots..+C_{n}^{2}=C_{n+1}^{3}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ donne la somme des coefficients de la 2ième colonne du triangle de Pascal comprenant *n* lignes.

La relation $\sum_{k=3}^{n}C_{k}^{3}=C_{3}^{3}+C_{4}^{3}+\dots..+C_{n}^{3}=C_{n+1}^{4}$ donne la somme des coefficients de la 3ième colonne du triangle de Pascal comprenant *n* lignes

Retour

Solution (MATH01E13)

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + \ z + \ \ t = -4 \\ x + 2y + \ z + \ \ t = -5 \\ x + \ \ y + 2z + \ t = 9 \\ x + \ \ y + \ \ z + 2t = -10 \end{cases}$$

Il ne faut pas se précipiter sur la méthode du pivot de Gauss et regarder la forme particulière de ce système.

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$+\begin{cases} 2x + \ \ y + \ z + \ \ t = -4 \\ x + 2y + \ z + \ \ t = -5 \\ x + \ \ y + 2z + \ t = 9 \\ x + \ \ y + \ \ z + 2t = -10 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 5x + 5y + 5z + 5t = -10 \quad}$$

On pose $S = x + y + z + t = -2$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} x + \ \ y + z + \ \ t + x = -4 \\ x + y + \ z + \ \ t + y = -5 \\ x + \ \ y + z + \ \ t + z = 9 \\ x + \ \ y + \ \ z + \ t + t = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + x = -4 \\ S + y = -5 \\ S + z = 9 \\ S + t = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = 11 \\ t = -8 \end{cases}$$

Moralité : il ne faut pas se précipiter sur la méthode générale mais bien regarder de près l'énoncé.

Retour

Exercice **(MATH01E01B)**

Soient deux réels x et y vérifiant : $a \geq 3$ *et* $b \leq -2$.

Donner le meilleur encadrement de : $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

Exercice (MATH01E01C)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Sans étudier les variations de f, donner le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x \in \left[-\dfrac{1}{2};2\right]$

Exercice (MATH01E02B)

Résoudre dans l'ensemble des réels

1) $341x^2 + 51x - 2 = 0$

2) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

3) $\dfrac{-27}{2x-3} + \dfrac{8}{3x+2} + \dfrac{5}{x^2-1} = 8$

4) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-m} - \dfrac{1}{x-2m} = 0$ *(Discuter suivant les valeurs de m)*

Exercice (MATH01E02C)

Trouver deux réels a et c tels que l'équation $ax^2 + 15x + c = 0$ admette deux solutions

$\frac{4}{3}$ *et* $-\frac{1}{2}$

Exercice (MATH01E06B)

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 2}$

$g : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 2x - 1}$

$h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$

Exercice (MATH01E06C)

1) Trouver deux entiers consécutifs dont le produit vaut : 4160

2) Problème de Mahavira (Mathématicien hindou du 9$^{\text{ième}}$ siècle)

Un quart d'un troupeau de chameaux a été vu dans la forêt. Deux fois la racine carrée

Solution (MATH01E01A)

$-2{,}5 < x < 3{,}5 \; et \; -5 < y < -1$

- $1 < -y < 5$
- Pour $-xy$, on effectue tous les produits

  $1 \times -2{,}5 = -2{,}5 \;;\; 5 \times -2{,}5 = -12{,}5 \;;\; 1 \times 3{,}5 = 3{,}5 \;;\; 5 \times 3{,}5 = 17{,}5$

  Soit : $-12{,}5 < -xy < 17{,}5$
- Pour les carrés, il faut faire attention que la borne inférieure égale 0 dès qu'un des intervalles de définition de x ou de y contient 0, elle est alors atteinte, donc l'inégalité devient large. L'autre borne est alors la plus grande valeur en valeur absolue des bornes.

  $0 \le x^2 < Max\left(|3{,}5|^2, |-2{,}5|^2\right) = 12{,}25$
- $1 < y^2 < 25$
- $1 < x^2 + y^2 < 37{,}25$
- $\frac{1}{5} < \frac{-1}{y} < 1$
- Pour le dernier résultat, il suffit de faire le produit membre à membre des deux inégalités ci-dessus, car toutes les bornes sont positives.

  $\frac{1}{5} < -\frac{x^2 + y^2}{y} < 37{,}25$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH01E01B)

$a \geq 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{3}$

$b \leq -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} < 0$

On peut additionner membre à membre les deux inégalités précédentes.

$-\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{3}$

On peut remarquer les inégalités strictes.

$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} < 0 \Leftrightarrow 0 < -\frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$

En additionnant membre à membre la première et la dernière inégalité

$0 < \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$0 < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{9}$

$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$0 < \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{9}$

$0 < \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$

$0 < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH01E01C)

Nous pouvons donner un encadrement de $f(x)$ en encadrant le numérateur et le dénominateur.

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 5$$

Donc

$$-1 \leq \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq 3$$

Cet encadrement n'est pas le meilleur encadrement car les valeurs données à x pour la borne supérieure, ne sont pas les mêmes pour le numérateur $(x = 2)$ et le dénominateur($x = 0$). Il faut donc si nous n'étudions pas la monotonie de f essayer d'exprimer $f(x)$ avec une seule occurrence de x.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$1 \leq x^2 + 1 \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -\frac{2}{x^2 + 1} \leq -\frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \leq 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \leq 1 - \frac{2}{5}$$

Finalement :

$$-1 \leq f(x) \leq \frac{3}{5}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution **(MATH01E02A)**

1) $\Delta = 324$ et $S = \{-7;11\}$

2) $\Delta = 5\,144\,045\,284$ et $S = \left\{-\dfrac{341}{27};\dfrac{1987}{53}\right\}$

3) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \text{ et } x \neq -2 \\ x+2+x+1 = (x+1)(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \text{ et } x \neq -2 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 5$ et $S = \left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

pour 3) il suffit de réduire au même dénominateur

4) $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$ d'où deux solutions m et 1, donc pour tout m, $S = \{1,m\}$

(La solution est double si et seulement si m=1)

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH01E02B)

1) $\Delta = 73^2$ donc $S = \left\{\dfrac{1}{31};-\dfrac{2}{11}\right\}$

2) $\Delta = 4$ donc $S = \left\{\sqrt{3}-1;\sqrt{3}+1\right\}$

3) On réduit au même dénominateur

$$\frac{-27}{2x-3}+\frac{8}{3x+2}+\frac{5}{x^2-1}=8$$
$$\Leftrightarrow \frac{-27(3x+2)(x^2-1)+8(2x-3)(x^2-1)+5(2x-3)(3x+2)}{(2x-3)(3x+2)(x^2-1)}=8$$

On développe et on réduit numérateur et dénominateur

$$\frac{-65x^3-48x^2+40x+48}{6x^4-5x^3-12x^2+5x+6}=8 \Leftrightarrow -48x^4+25x^3+48x^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(-48x^2+25x+48=0\right)$$

On résout l'équation du second degré et on obtient l'ensemble des solutions :

$$S=\left\{0;\frac{-25-\sqrt{9841}}{96};\frac{-25+\sqrt{9841}}{96}\right\}$$

4)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-m}-\frac{1}{x-2m}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(x-m)(x-2m)+x(x-2m)-x(x-m)=0\\ x\neq 0,\ x\neq m,\ x\neq 2m\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2-4mx+2m^2=0\\ x\neq 0,\ x\neq m,\ x\neq 2m\end{cases} \qquad \Delta = 16m^2-8m^2=8m^2$$

On a $\quad x_1 = m(2-\sqrt{2})$ et $x_2 = m(2+\sqrt{2})$ avec $m \neq 0$

D'où $\quad S=\left\{m(2-\sqrt{2});m(2+\sqrt{2})\right\}$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH01E02C)

Si $\frac{4}{3}$ est solution alors on a $a\frac{16}{9}+15\times\frac{4}{3}+c=0 \Leftrightarrow 16a+180+9c=0$

Si $-\frac{1}{2}$ est solution alors on a $a\frac{1}{4}-15\times\frac{1}{2}+c=0 \Leftrightarrow a+30+4c=0$

On résout donc le système :

$$\begin{cases}16a+9c=-180\\ a+4c=30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=30-4c\\ 16(30-4c)+9c=-180\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-18\\ c=12\end{cases}$$

Finalement, l'équation était : $-18x^2+15x+12=0$

Vérification :

$$\Delta=15^2+4\times12\times18=1089=33^2$$

$$x_1=\frac{-15-33}{-36}=\frac{4}{3}$$

$$x_2=\frac{-15+33}{-36}=-\frac{1}{2}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH01E03A)

Après avoir réduit les polynômes on obtient :

$f(x) =$	$f(-1)$	$f\left(\frac{3}{4}\right)$	$f(\sqrt{5})$
$15x^2$	15	$\frac{135}{16}$	75
$\frac{3}{4}x^3$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{81}{256}$	$\frac{15\sqrt{5}}{4}$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH01E04A)

a) $5x^2 + 4x$

b) $3x^4 - 14x^3 + 5x^2 - 2x + 3$

c) $x^4 - 12x^3 - 285x^2 + 200x - 150$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution **(MATH01E05A)**

a) $(5x+1)(2x-1)+(2x-1)(2x+1)=(2x-1)\big((5x+1)+2x+1\big)=(2x-1)(7x+2)$

b) $3x^4-6x^2+3=3(x^4-2x^2+1)=3(x^2-1)^2=3(x-1)^2(x+1)^2$

c) $\big[(5x+2)-(2x-1)\big](5x+2+2x-1)=(3x+3)(7x+1)=3(x+1)(7x+1)$

d) $2(x^3-8)-3(x^2-4)+x-2=2(x-2)(x^2+2x+4)-3(x-2)(x+2)+x-2$
$=(x-2)(2x^2+4x+8-3x-6+1)=(x-2)(2x^2+x+3)$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH01E06A)

1) Tout étant positif on multiplie tous les membres par $(3x+1)^2$ et on suppose $x \neq -\frac{1}{3}$

$$\begin{cases}(3x+1)^2-(2x-3)^2 \leq 0 \\ (2x-3)^2-9(3x+1)^2 \leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\big((3x+1)-(2x-3)\big)\big((3x+1)+(2x-3)\big) \leq 0 \\ \big((2x-3)-3(3x+1)\big)\big((2x-3)+3(3x+1)\big) \leq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+4)(5x-2) \leq 0 \\ (-7x-6)(11x) \leq 0\end{cases} \quad d'où \quad S=\left[-4;-\frac{6}{7}\right]\cup\left[0;\frac{2}{5}\right]$$

On vérifie que $-\frac{1}{3} \notin S$

2) L'ensemble de définition de ce système est R.

$$\begin{cases}x^2 \leq 4 \\ 3x+5 \geq 2x+4 \\ 4x+1<2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2 \leq x \leq 2 \\ x \geq -1 \\ x<-\frac{1}{2}\end{cases} \quad d'où \quad S=\left[-1;-\frac{1}{2}\right[$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice suivant.

Exercice

Retour

Solution **(MATH01E06B)**

- Ensemble de définition de *f* :

Il faut chercher le signe du trinôme.

Deux racines évidentes : $x = 1 \; ou \; x = -2$

Finalement : $D_f = \{x \in R \,/\, x^2 + x - 2 \geq 0\} =]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$

- Ensemble de définition de *g* :

Il faut chercher le signe du trinôme.

Nous trouvons deux racines réelles : $x = -1 \; ou \; x = \frac{1}{3}$

Finalement : $D_f = \{x \in R \,/\, 3x^2 + 2x - 1 \geq 0\} =]-\infty;-1] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

- Ensemble de définition de *h* :

Il faut chercher le signe du trinôme.

Nous trouvons deux racines réelles : $x = 1 \; ou \; x = 3$

Finalement : $D_f = \{x \in R \,/\, -x^2 + 4x - 3 > 0\} =]1;3[$

Attention ici à bien exclure les bornes pour lesquelles le dénominateur s'annule.

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice suivant.

Exercice

Retour

Solution (MATH01E06C)

1) On doit résoudre : $n(n+1) = 4160$

On peut trouver par tâtonnement, ce qui constitue sans doute la bonne méthode, du moins la plus rapide. En effet, $\sqrt{4160} \approx 64{,}5$

On essaye par dichotomie 64.

$64 \times 65 = 4160$. D'où la solution : $n = 64$

On peut également mettre en route la résolution de l'équation du second degré. vous pourrez vérifier que cela marche.

2) Soit x le nombre de chameaux du troupeau. On met en équation les hypothèses.

$$\frac{1}{4}x + 2\sqrt{x} + 3 \times 5 = x \Leftrightarrow -3x + 8\sqrt{x} + 60 = 0$$

On pose $X = \sqrt{x}$

On est ramené à une équation du second degré. $-3X^2 + 8X + 60 = 0$

$\Delta = 784$

$$X_1 = \frac{-8 - \sqrt{784}}{-6} = 6$$

$$X_2 = \frac{-8 + \sqrt{784}}{-6} < 0$$

Une seule solution est possible, le nombre de chameaux est donc 36.

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH01E07A)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (2x+3y)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ (2x+3y)^2 = 25 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = y \\ (2x+3y)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ (5x)^2 = 25 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 25 \end{cases}$$

Soit finalement $S = \{(1;1);(-1;-1);(5;-5);(-5;5)\}$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH01E08A)

Commençons par supprimer les termes fractionnaires.

$$\begin{cases} x + \quad y + \quad z = 72{,}5 \\ \dfrac{x}{25} + \dfrac{y}{14} + \dfrac{z}{35} = \dfrac{17}{5} \\ \dfrac{x}{25} + \dfrac{y}{35} + \dfrac{z}{14} = \dfrac{31}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 72{,}5 \\ 14x + 25y + 10z = 1190 \\ 14X + 10Y + 25Z + 1085 \end{cases}$$

Puis déroulons la méthode du pivot

$$\begin{cases} x + y + z = 72{,}5 \\ 14x + 25y + 10z = 1190 \\ 14X + 10Y + 25Z + 1085 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \quad z = 72{,}5 \\ \quad 11y - \ 4z = 175 \\ -4y + 11z = 70 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \quad z = 72{,}5 \\ \quad 11y - \ 4z = 175 \\ \qquad\quad 105z = 1470 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 37{,}5 \\ y = 21 \\ z = 14 \end{cases}$$

$$S = \{(37{,}5;21;14)\}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution **(MATH01E09A)**

On pose :

$$P(n) \quad : \quad 1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$1+2^2=5$

$\frac{2(2\times 2+1)(2+1)}{6}=5$

Donc $P(1)$ est vraie.

On suppose que $\forall k\in N,\quad k\le n,\ P(k)$ est vraie.

Calculons $1+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

La factorisation finale est facile car on connaît la forme du résultat.

Ceci prouve donc $P(n+1)$

On peut donc affirmer que $P(n)$ est vraie pour tout *n*.

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH01E10A)

posons : $P(n) \quad : \quad \sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)!-1$

$P(1)$ est vraie, en effet $1x1! = 2!-1$

On suppose que $\forall k \in N, \quad k \leq n, \; P(k)$

Aide

Faites attention que x peut prendre la valeur 0. C'est important au niveau du carré. Pour le reste des calculs essayez d'utiliser la méthode pratique proposée dans le cours.

Retour

Aide

Faites attention dans cet exercice au fait qu'au départ a et b ne sont pas bornés. Donc $\frac{1}{a}$ par exemple est minoré par 0 mais ne peut atteindre cette borne.

Retour

Aide

En encadrant le numérateur et le dénominateur séparément et sans changer l'expression de f : vous obtiendrez ainsi un encadrement « grossier » de $f(x)$. Cependant pour obtenir le meilleur encadrement de $f(x)$, il faut modifier son expression afin de n'avoir plus qu'une occurrence de x.

Retour

Aide (

Pour le 1) et le 2), il suffit d'appliquer les formules. Pour le 3), il faut réduire au même dénominateur. Attention cependant à l'ensemble de définition de l'équation. Pour le 4), Il faut discuter suivant les valeurs de *m*, mais distinguez le cas de la solution double.

Retour

Aide (

Pour le 1) et le 2), il suffit d'appliquer les formules. Pour le 3), il faut réduire au même dénominateur. Attention cependant à l'ensemble de définition de l'équation. Pour le 4), Il faut discuter suivant les valeurs de *m*, mais attention également à l'ensemble de définition.

Retour

Aide

Si $\frac{4}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ sont solutions alors ils vérifient l'égalité proposée pour $x=\frac{4}{3}$ et $x=-\frac{1}{2}$.

N'oubliez de vérifier votre solution.

Retour

Aide (

Réduisez bien l'expression avant de faire le calcul. Donnez bien la forme la plus simple pour le résultat.

Retour

Aide (

Respectez bien les règles de calculs dans R. Si vous otez les parenthèses, n'oubliez pas de changer les signes opératoires à l'intérieur.

Reportez vous au cours sur les identités remarquables.

Retour

Aide (

- Pour le 1)Il faut faire apparaître le facteur $(2x-1)$ dans le deuxième membre de l'addition.

- Pour le 2) Il faut factoriser 3 et reconnaître l'identité remarquable $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

- Pour le 3), il faut utiliser l'identité remarquable : a^2-b^2

- Pour le 4), il faut utiliser a^3-b^3 et a^2-b^2 et faire apparaître le facteur commun.

Retour

Aide (

- N'oubliez pas l'ensemble de définition.
- Pour le a), On peut multiplier les deux membres par le nombre positif non nul : $(3x+1)^2$ et résoudre le système formé par les deux inéquations.

- Pour le b), on résout chaque inéquation et on fait l'intersection des ensembles solutions de chacune.

Retour

Aide

Une racine est définie si et seulement si son « intérieur » est positif ou nul.

Il faut donc étudier les signes des différents trinômes et conclure. Attention pour *h* de bien ôter les valeurs qui annulent le dénominateur.

Retour

Aide

- Pour le 1), il y a une méthode directe par tâtonnement et la méthode classique qui consiste à résoudre l'équation du second degré.

- Pour le 2), il faut poser : $X = x^2$

Retour

Aide

Il faut résoudre ce système en considérant deux cas : $x = y$ *ou* $x = -y$

Retour

Aide

Commencez par vous débarrasser des dénominateurs en multipliant les équations par des réels adéquats, puis déroulez la méthode du pivot.

Retour

Aide

Cet exercice est très semblable à l'exemple du cours dont vous pouvez vous inspirer.

Retour

Aide

Il faut utiliser : $\sum_{k=1}^{n+1} A(k) = \sum_{k=1}^{n} A(k) + A(n+1)$

Retour