13. EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS.

1. DEFINITION

Soit l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = \varphi(x) \quad \text{(I)} \quad a \in R^*,\ b \in R \quad c \in R$$

φ fonction continue sur un intervalle I de R

L'équation homogène associée à l'équation (I) (ou équation sans second membre) est

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{(II)}$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est un espace vectoriel de dimension 2 sur R.

2. RESOLUTION de L'EQUATION SANS SECOND MEMBRE (II).

On forme l'équation du second degré appelée équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (II_c)$$

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La solution générale de (II) est

$$y_{SG(II)} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad \text{avec} \quad (C_1, C_2) \in R^2$$

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

L'équation caractéristique admet une racine réelle double

$$r = -\frac{b}{2a}$$

La solution générale de (II) est

$$y_{SG(II)} = e^{rx}(C_1 x + C_2) \quad avec \ (C_1, C_2) \in R^2$$

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées

soit en posant $\alpha = Partie\ réelle\ de\ r_1\ (ou\ de\ r_2) = -\frac{b}{2a}$

$$\beta = Valeur\ absolue\ Partie\ imaginaire\ de\ r_1\ (ou\ de\ r_2) = \left|\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right|$$

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha + i\beta \quad et \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha - i\beta$$

La solution générale de (II) est

$$y_{SG(II)} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \quad avec \ (C_1, C_2) \in R^2$$

3. RESOLUTION de L'EQUATION COMPLETE (I).

La solution générale de l'équation complète (I) est la somme

- de la solution générale de l'équation sans second membre (II)
- et d'une solution particulière de l'équation complète (I)

$$y_{SG(I)} = y_{SG(II)} + y_{SP(I)}$$

C'est le principe de superposition des solutions (dû à la linéarité de l'équation différentielle)

4. RECHERCHE d'une SOLUTION PARTICULIERE de L'EQUATION COMPLETE (I)

4.1.. Formes classiques du second membre.

- $\varphi(x) = P_n(x)$ avec P_n polynôme de degré n

$c \neq 0 \qquad y_{SP(II)} = Q_n(x)$

$c = 0 \ et \ b \neq 0 \qquad y_{SP(II)} = xQ_n(x)$

$c = b = 0 \qquad y_{SP(II)} = x^2 Q_n(x)$

avec Q_n polynôme de degré n

- $\varphi(x) = e^{mx} P_n(x)$ avec P_n polynôme de degré n et $m \in R^*$

ou bien, on effectue le changement de fonction inconnue $y = e^{mx} z \ avec \ z \ fonction \ de \ x$

ou bien

m non racine de l'équation caractéristique $\qquad y_{SP(II)} = e^{mx} Q_n(x)$

m racine simple $\qquad y_{SP(II)} = e^{mx} x Q_n(x)$

m racine double $\qquad y_{SP(II)} = e^{mx} x^2 Q_n(x)$

avec Q_n polynôme de degré n

- $\varphi(x) = P_n(x)\cos px + R_{n'}(x)\sin px \qquad p \in R^*$

avec P_n polynôme de degré n et $R_{n'}$ polynôme de degré n'

$\pm ip$ non racines de l'équation caractéristique

$y_{SG(II)} = Q_k(x)\cos px + S_k(x)\sin px$

$\pm ip$ racines de l'équation caractéristique

$y_{SG(II)} = x(Q_k(x)\cos px + S_k(x)\sin px)$

$k = \max(n, n')$

$Q_k \ et \ S_k$ polynômes de degré k

- $\varphi(x) = e^{mx}(A\cos px + B\sin px)$, $(m, p) \in R^2$ (m ou p peut être nul) et $(A, B) \in R^2$

on effectue le changement de fonction inconnue

$y = e^{mx} z \ avec \ z \ fonction \ de \ x$

- $\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(x) \quad i = 1, 2, ... n$

et si $\Psi_i(x)$ est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = \varphi_i(x)$

$\sum_i \Psi_i(x)$ est une intégrale particulière de $ay'' + by' + cy = \sum_i \varphi_i(x)$

© dpic – inpl – mai 1999

5. RECHERCHE d'une SOLUTION PARTICULIERE de L'EQUATION COMPLETE (I)

5.1.. Méthode de variation des constantes.

Nous devons résoudre une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = \varphi(x) \qquad (I) \text{ avec } a \neq 0$$

Lorsque le second membre n'a pas l'une des formes indiquées précédemment, on emploie la méthode dite de variation des constantes.

Soit y_1 *et* y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$ (II)

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, on suppose que les constantes λ sont des fonctions de *x* dérivables.

On cherche une solution particulière de l'équation complète (I) sous la forme $y = \lambda_1(x)y_1 + \lambda_2(x)y_2$

D'où $y' = \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 + \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$

Lagrange (Français 1736 – 1813) propose d'imposer aux fonctions inconnues λ_1 *et* λ_2 la condition supplémentaire $\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0$

il reste alors $y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$ et en dérivant

$y'' = \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2''$

En reportant dans l'équation (I) en tenant compte du fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation (II), après simplification il reste

$$a(\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2') = \varphi(x)$$

D'où le système qui détermine λ_1' et λ_2'

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \dfrac{\varphi(x)}{a} \\ \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \end{cases}$$

© dpic – inpl – mai 1999

Exercice MATH13E01

Résoudre l'équation différentielle

$$y''+y'+y=x^2+x+1$$

Exercice MATH13E02

Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y''+2y'+y=2e^{-x}$$

vérifiant $y(0)=3$ et $y'(0)=1$

Exercice MATH13E03

Résoudre l'équation différentielle

$$y''+y'=x+\operatorname{ch}x$$

Exercice MATH13E04

Résoudre l'équation différentielle

$$y''+2y'+y=2x^2\operatorname{ch}x$$

Exercice MATH13E05

Résoudre l'équation différentielle

$$y''-3y'-4y=xe^{|x|}$$

Exercice MATH13E06

Résoudre l'équation différentielle

$$y''+y'-2y=x^2e^{-2x}$$

Exercice MATH13E07

Résoudre l'équation différentielle

$$y''+2y'+5y=e^{-x}(2\cos 2x-3\sin 2x) \quad (I)$$

© dpic- inpl – mai 1999

Exercice MATH13E08

Résoudre l'équation différentielle

$$y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{1+x^2}$$

Exercice MATH13E09

Résoudre l'équation différentielle

$$y''+y=|x|+1$$

Exercice MATH13E10

Résoudre l'équation différentielle

$$y''-4y=|x|$$

Exercice MATH13E11

Résoudre l'équation différentielle

$$(E)\qquad y''+y=\frac{1}{\cos x}\quad \text{avec } x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

Exercice MATH13E12**

Résoudre $y''+2y'-3y=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$ (I)

Exercice MATH13E13

Résoudre l'équation différentielle

$$4xy''+2y'-y=0$$

Exercice MATH13E14**

Résoudre l'équation différentielle

$$x^2y''-3xy'+4y=x^2$$

sachant que $y=x^2$ est solution de l'équation homogène associée

Exercice MATH13E15**

Résoudre l'équation différentielle

$$x^2y''+xy'-4y=4x^2 \quad (I)$$

Exercice MATH13E16**

Résoudre l'équation différentielle

$$x^2y''+4xy'+2y=\ln(1+x) \quad (I)$$

Exercice MATH13E17**

Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+f(-x)=x \quad (E)$$

<u>Indication</u> : On pourra poser

$g(x)=f(x)+f(-x)$ et $h(x)=f(x)-f(-x)$

et établir deux équations différentielles linéaires du second ordre dont g et h sont solutions

Solution MATH13E01

$y''+y'+y=x^2+x+1 \quad (E)$

Equation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants

soit $y''+y'+y=0 \quad (E_0)$ l'équation sans second membre ou équation homogène associée

et $r^2+r+1=0$ l'équation caractéristique

qui admet pour racines les nombres complexes conjugués

$$r_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=j \text{ et } r_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\overline{r_1}=\bar{j}=j^2$$

$$\alpha=\mathrm{Re}(r_1)=\mathrm{Re}(r_2)=-\frac{1}{2}$$

$$\beta=|\mathrm{Im}(r_1)|=|\mathrm{Im}(r_2)|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) est

$$y_{SG(E_0)}=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \text{ avec } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Le second membre $\varphi(x)=x^2+x+1$ est un polynôme du second degré

puisque $c=1\neq 0$, il existe une solution particulière de l'équation complète

sous forme d'un polynôme de même degré 2 à coefficients indéterminés

$$y=Q(x)=ax^2+bx+c$$
$$y'=2ax+b$$
$$y''=2a$$

par idenfication

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=1 \Rightarrow b=-1 \\ 2a+b+c=1 \Rightarrow c=0 \end{cases}$$

la solution particulière de l'équation complète (E) est

$$y_{SP(E)}=x^2-x$$

en appliquant le principe de superposition des solutions

$$y_{SG(E)}=y_{SG(E_0)}+y_{SP(E)}=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^2-x \text{ avec } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Retour

© dpic – inpl – mai 1999

Solution MATH13E02

Rappel : problème de Cauchy (admet une solution et une seule sur I)

$y''+2y'+y=2e^{-x}$ (E)

Equation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants

soit $y''+2y'+y=0$ (E_0) l'équation sans second membre

et $r^2+2r+1=0$ l'équation caractéristique

qui admet une racine réelle double $r_1=r_2=-1$

$y_{SG(E_0)}=(C_1x+C_2)e^{-x}$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

le second membre $\varphi(x)=2e^{-x}$ est de la forme e^{mx} avec $m=-1=r_1=r_2$

il existe donc une solution particulière sous la forme $y=Ax^2e^{-x}$ avec A constante réelle à déterminer

$y=Ax^2e^{-x}$

$y'=A(2x-x^2)e^{-x}$

$y''=A(2-4x+x^2)e^{-x}$

en reportant dans l'équation différentielle, on obtient

$y''+2y'+y=2Ae^{-x}=2e^{-x}$ d'où $A=1$

$y_{SP(E)}=x^2e^{-x}$

d'après le principe de superposition des solutions

$y_{SG(E)}=(x^2+C_1x+C_2)e^{-x}$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

pour déterminer les constantes, on utilise les deux conditions initiales

$y(x)=(x^2+C_1x+C_2)e^{-x}\Rightarrow y(0)=C_2=3$

$y'(x)=(-x^2+(-C_1+2)x+C_1-C_2)e^{-x}\Rightarrow y'(0)=C_1-C_2=1$ soit $C_1=4$

et la solution Y du problème avec conditions initiales est

$Y(x)=(x^2+4x+3)e^{-x}$

Retour

Solution MATH13E03

$y''+y' = x + \text{ch}x = x + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (E)$

Equation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants

soit $y''+y' = 0 \quad (E_0)$ l'équation sans second membre

et $r^2 + r = 0$ l'équation caractéristique

qui admet pour racines les nombres réels $r_1 = -1$ et $r_2 = 0$

la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) est

$y_{SG(E_0)} = C_1 e^{-x} + C_2$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

on découple le second membre

$y''+y' = x \qquad (E.1)$

• solution particulière pour $\varphi_1(x) = x$

$\varphi_1(x)$ est un polynôme du premier degré, puisque $c = 0$ et $b = 1$,

alors il existe une solution particulière sous la forme $xQ_1(x) = x(ax+b) = ax^2 + bx$

$y = ax^2 + bx$

$y' = \quad 2ax + b$

$y'' \quad\quad 2a$

en reportant dans l'équation (E.1)

on obtient

$2ax + b + 2a = x$

et par identification

$a = \frac{1}{2}$ et $b = -1$

$y_{SP(E.1)} = \frac{1}{2}x^2 - x$

$y''+y' = \frac{1}{2}e^x \qquad (E.2)$

• solution particulière pour $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}e^x$

sous la forme

$y = Ae^x$

et l'on obtient

$y_{SP(E.2)} = \frac{1}{4}e^x$

© dpic – inpl – mai 1999

$y''+y'=\frac{1}{2}e^{-x}$ (E.3)

• solution particulière pour $\varphi_3(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$ de la forme e^{mx} avec $m=r_1=-1$ et $m\neq r_2$

solution particulière sous la forme

$y=Bxe^{-x}$

$y'=B(1-x)e^{-x}$

$y''=B(-2+x)e^{-x}$

et en reportant dans (E.3)

on obtient $B=-\frac{1}{2}$

$y_{SP(E.3)}=-\frac{1}{2}xe^{-x}$

superposition des solutions

$y_{SG(E)}=(-\frac{1}{2}x+C_1)e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-x+C_2+\frac{1}{4}e^{x}$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

Retour

Solution MATH13E04

$y''+2y'+y=2x^2\text{ch}x=x^2(e^x+e^{-x})$ (E)

equation sans second membre $y''+2y'+y=0$ (E_0)

equation caractéristique $r^2+2r+1=0$

Racine double $r_1=r_2=-1$ et $y_{SG(E_0)}=e^{-x}(C_1x+C_2)$ $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

on découple le second membre

- solution particulière pour $\varphi_1(x)=x^2e^x$ $(m=1\neq r_1$ et $\neq r_2)$ sous la forme

  $y=e^x(ax^2+bx+c)$

  $y'=e^x\left[ax^2+(2a+b)x+(b+c)\right]$

  $y''=e^x\left[ax^2+(4ax+b)+c+2b+2a\right]$

  par identification $a=\frac{1}{4}$ $b=-\frac{1}{2}$ $c=\frac{3}{8}$

  $y_{SP(E.1)}=e^x(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8})$

- solution particulière pour $\varphi_2(x)=x^2e^{-x}$ $(m=1=r_1=r_2)$

  $y=e^{-x}(ax^4+bx^3+cx^2)$

  par identification $a=\frac{1}{12}$ $b=0$ $c=0$

  $y_{SP(E.2)}=e^{-x}(\frac{1}{12}x^4)$

par superposition des solutions

$y_{SG(E)}=e^{-x}(\frac{1}{12}x^4+C_1x+C_2)+e^x(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8})$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

Retour

© *dpic – inpl – mai 1999*

Solution MATH13E05

$y''-3y'-4y=xe^{|x|}$ (E)

Equation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants

soit $y''-3y'-4y=0$ (E_0) l'équation sans second membre

et $r^2-3r-4=0$ l'équation caractéristique

qui admet pour racines les nombres réels $r_1=-1$ et $r_2=-4$

la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) est

$y_{SG(E_0)}=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

Le second membre $\varphi(x)=\begin{cases} xe^{x} & \text{si } x\geq 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x<0 \end{cases}$

pour $x\geq 0$, $(m=1$ et $m\neq r_1$ et $\neq r_2)$

il existe une solution particulière de l'équation complète sous forme

$y=(ax+b)e^x$

$y'=(ax+a+b)e^x$

$y''=(ax+2a+b)e^x$

par idenfication $a=-\dfrac{1}{6}$ et $b=\dfrac{1}{36}$

la solution particulière de l'équation complète (E) pour $x\geq 0$ est

$y_{SP(E)}=(-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{36})e^x$

pour $x<0$, $(m=-1=r_1$ et $m\neq r_2)$

il existe une solution particulière de l'équation complète sous forme

$y=(ax^2+bx)e^{-x}$

$y'=(-ax^2+(2a-b)x+b)e^{-x}$

$y''=(ax^2+(-4a+b)x+2a-2b)e^{-x}$

par idenfication $a=-\dfrac{1}{10}$ et $b=-\dfrac{1}{25}$

la solution particulière de l'équation complète (E) pour $x<0$ est

$y_{SP(E)}=(-\dfrac{1}{10}x-\dfrac{1}{25})e^{-x}$

en appliquant le principe de superposition des solutions

$$y_{SG(E)}=y_{SG(E_0)}+y_{SP(E)}=\begin{cases}C_1e^{-x}+C_2e^{4x}+(-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{36}) & \text{pour } x\geq 0\\ (-\dfrac{1}{10}x^2-\dfrac{1}{25}x+C_1)e^{-x}+C_2e^{4x} & \text{pour } x<0\end{cases} \quad \text{avec } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Retour

Solution MATH13E06

$y''+y'-2y=x^2e^{-2x}$ (E)

equation sans second membre $y''+y'-2y=0$ (E_0)

equation caractéristique $r^2+r-2=0$

Racines réelles $r_1=1$ et $r_2=-2$ et $y_{SG(E_0)}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

pour rechercher une solution particulière, on effectue le changement de fonction inconnue

$y=e^{-2x}u$ avec u fonction de x

après simplification par $e^{-2x}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

on obtient l'équation différentielle

$u''-3u'=x^2$

et l'on cherche une solution particulière de l'équation en u ($c=0$ et $b=-3$) sous la forme

$u=ax^3+bx^2+cx$

$u'=3ax^2+2bx+c$

$u''=6ax+2b$

et par identification, on obtient $a=-\dfrac{1}{9}$ $b=-\dfrac{1}{9}$ et $c=-\dfrac{2}{27}$

la solution particulière de l'équation complète (E) est

$y_{SP(E)}=(-\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{2}{27}x)e^{-2x}$

en appliquant le principe de superposition des solutions

$y_{SG(E)}=y_{SG(E_0)}+y_{SP(E)}=C_1e^x+(-\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{2}{27}x+C_2)e^{-2x}$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}$

Retour

Solution MATH13E07

l'équation sans second membre $y''+2y'+5y=0$ (II)

admet pour équation caractéristique $r^2+2r+5=0$

les racines sont $r_1=-1+2i$ et $r_2=-1-2i=\overline{r_1}$

la solution générale de l'équation sans second membre est

$y_{SG(II)}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

pour obtenir une solution particulière de l'équation complète, on effectue

le changement de fonction inconnue $y=e^{-x}z$ avec z fonction de x

$y=e^{-x}z$

$y'=e^{-x}(-z+z')$

$y''=e^{-x}(z-2z'+z'')$

on reporte dans l'équation différentielle, après simplification,

on obtient:

$z''+4z=2\cos 2x-3\sin 2x$

les racines de l'équation caractéristique en z sont $2i$ et $-2i$

le second membre est $2\cos 2x-3\sin 2x$ donc $\omega=2$

la solution particulière de l'équation en z est de la forme

$z=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$ avec A et B constantes réelles à déterminer

$z'=x(2B\cos 2x-2A\sin 2x)+A\cos 2x+B\sin 2x$

$z''=x(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)+4B\cos 2x-4A\sin 2x$

et

$4B\cos 2x-4A\sin 2x=2\cos 2x-3\sin 2x$

par identification

$B=\frac{1}{2}$ et $A=\frac{3}{4}$

$z_{SP}=x(\frac{3}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x)$

$y_{SP(I)}=xe^{-x}(\frac{3}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x)$

par superposition des solutions

$y_{SG(I)}=e^{-x}\left[(\frac{3x}{4}+C_1)\cos 2x+(\frac{x}{2}+C_2)\sin 2x\right]$ $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

Retour

Solution MATH13E08

On effectue le changement de fonction inconnue $y = e^{-2x}z$ avec z fonction de x

$y = e^{-2x}z$

$y' = e^{-2x}(-2z + z')$

$y'' = e^{-2x}(4z - 4z' + z'')$

en reportant dans l'équation initiale, il reste

$$e^{-2x}z'' = \frac{e^{-2x}}{1+x^2}$$

puisque $e^{-2x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

on obtient

$$z'' = \frac{1}{1+x^2}$$

et en intégrant une première fois

$z' = \operatorname{Arctan} x + C_1$

puis en intégrant une seconde fois

$$z = x\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1x + C_2 \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

et finalement

$$y = e^{-2x}\left(x\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1x + C_2\right) \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Retour

Solution MATH13E09

L'équation différentielle s'écrit

$$y''+y=\begin{cases}-x+1 & \text{si } x\in I_1=\left]-\infty,0\right[\\ x+1 & \text{si } x\in I_2=\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

on cherche des solutions sur chacun des intervalles et l'on raccorde les solutions en 0

pour $x\in I_1=\left]-\infty,0\right[$, l'équation $y''+y=-x+1$

admet pour solution générale $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x+1$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

pour $x\in I_2=\left]0,+\infty\right[$, l'équation $y''+y=x+1$

admet pour solution $y=D_1\cos x+D_2\sin x+x+1$ avec $(D_1,D_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\lim_{x\to 0^-} y(x)=\lim_{x\to 0^+} y(x)\Rightarrow C_1=D_1$$

$$\lim_{x\to 0^-} y'(x)=\lim_{x\to 0^+} y'(x)\Rightarrow C_2-1=D_2+1$$

$$\lim_{x\to 0^-} y''(x)=\lim_{x\to 0^+} y''(x)\Rightarrow C_1=D_1$$

si l'on exprime D_1 et D_2 en fonction de C_1 et C_2, on obtient

$D_1=C_1$ et $D_2=C_2-2$

soit, la solution de l'équation différentielle

$$y=f(x)=\begin{cases}C_1\cos x+C_2\sin x-x+1 & \text{si } x\in I_1=\left]-\infty,0\right[\\ C_1\cos x+(C_2-2)\sin x+x+1 & \text{si } x\in I_2=\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

Retour

© dpic – inpl – mai 1999

Solution MATH13E10

L'équation différentielle s'écrit

$$y''-4y=\begin{cases}-x & \text{si } x\in I_1=\left]-\infty,0\right[\\ x & \text{si } x\in I_2=\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

on cherche des solutions sur chacun des intervalles et l'on raccorde les solutions en 0

pour $x\in I_1=\left]-\infty,0\right[$, l'équation $y''-4y=-x$

admet pour solution générale $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{x}{4}$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

pour $x\in I_2=\left]0,+\infty\right[$, l'équation $y''-4y=x$

admet pour solution $y=D_1e^{2x}+D_2e^{-2x}-\dfrac{x}{4}$ avec $(D_1,D_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\lim_{x\to0^-}y(x)=\lim_{x\to0^+}y(x)=0\Rightarrow C_1+C_2=D_1+D_2$$

$$\lim_{x\to0^-}y'(x)=\lim_{x\to0^+}y'(x)\Rightarrow 2C_1-2C_2+\frac{1}{4}=2D_1-2D_2-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to0^-}y''(x)=\lim_{x\to0^+}y''(x)\Rightarrow C_1+C_2=D_1+D_2$$

si l'on exprime D_1 et D_2 en fonction de C_1 et C_2, on obtient

$D_1=C_1+\dfrac{1}{8}$ et $D_2=C_2-\dfrac{1}{8}$

soit, la solution de l'équation différentielle

$$y=f(x)=\begin{cases}C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{x}{4} & \text{si } x\in I_1=\left]-\infty,0\right[\\ (C_1+\dfrac{1}{8})e^{2x}+(C_2-\dfrac{1}{8})e^{-2x}-\dfrac{x}{4} & \text{si } x\in I_2=\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

Retour

Solution MATH13E11

Le second membre n'étant pas l'un des cas particuliers étudié dans le cours, utilisons la méthode de variation des constantes.

La solution générale de l'équation sans second membre

$$(E_0) \qquad y''+y=0$$

est $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

On recherche une solution particulière de l'équation complète (E) en supposant C_1 et C_2 fonction de x

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

Dérivons

$$y' = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x + C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x$$

Nous disposons d'une seule équation supplémentaire mais de deux inconnues (les constantes C_1 et C_2). Lagrange propose d'imposer la condition supplémentaire :

$$C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0$$

afin de ne pas faire apparaître les dérivées $C''_1(x)$ et $C''_2(x)$ dans le calcul de y''.

Dérivons une nouvelle fois pour obtenir y''

$$y'' = -C_1(x)\cos x - C_2(x)\sin x - C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x$$

Reportons ces valeurs dans l'équation (E), il reste

$$-C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

D'où le système linéaire à deux équations et deux inconnues

$$\begin{cases} C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0 \\ -C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Ce système admet une solution et une seule car son déterminant est toujours différent de zéro (voir cas général démontré par Wromski)

on obtient $C'_1(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $C'_2(x) = 1$

en intégrant

$$C_1(x) = \ln(\cos x) \quad \text{et} \quad C_2(x) = x \ \text{ car } \cos x > 0 \ \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

la solution particulière de l'équation (E) est:

© dpic – inpl – mai 1999

$$y_{SP(E)} = (\ln(\cos x))\cos x + x\sin x$$

et par superposition des solutions

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\quad y_{SG(E)} = (\ln(\cos x) + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

Retour

Solution MATH13E12

Le second membre n'étant pas l'un des cas particuliers étudié dans le cours, utilisons la méthode de variation des constantes.

La solution générale de l'équation sans second membre

$$(E_0) \qquad y''+2y'-3y=0$$

est $y=\lambda_1 e^x+\lambda_2 e^{-3x}$

On recherche une solution particulière de l'équation complète (E) en supposant λ_1 et λ_2 fonction de x

$$y=\lambda_1(x)e^x+\lambda_2(x)e^{-3x}$$

Dérivons

$$y'=\lambda_1(x)e^x-3\lambda_2(x)e^{-3x}+\lambda'_1(x)e^x+\lambda'_2(x)e^{-3x}$$

Nous disposons d'une seule équation supplémentaire mais de deux inconnues (les constantes λ_1 et λ_2). Lagrange propose d'imposer la condition supplémentaire :

$$\lambda'_1(x)e^x+\lambda'_2(x)e^{-3x}=0$$

afin de ne pas faire apparaître les dérivées $\lambda''_1(x)$ et $\lambda''_2(x)$ dans le calcul de y''

Dérivons une nouvelle fois pour obtenir y''

$$y''=\lambda_1(x)e^x+9\lambda_2(x)e^{-3x}+\lambda'_1(x)e^x-3\lambda'_2(x)e^{-3x}$$

Reportons ces valeurs dans l'équation (E), il reste

$$\lambda'_1(x)e^x-3\lambda'_2(x)e^{3x}=\frac{1}{e^{2x}+1}$$

D'où le système linéaire à deux équations et deux inconnues

$$\begin{cases}\lambda'_1(x)e^x+\lambda'_2(x)e^{3x}=0\\ \lambda'_1(x)e^x-3\lambda'_2(x)e^{3x}=\dfrac{1}{e^{2x}+1}\end{cases}$$

ce système admet une solution et une seule car son déterminant est toujours différent de zéro (voir cas général démontré par Wromski)

on obtient $\lambda'_1(x)=\dfrac{1}{4}\dfrac{e^{-x}}{e^{2x}+1}$ et $\lambda'_2(x)=-\dfrac{1}{4}\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$

en intégrant

$$\lambda_1(x)=\frac{1}{4}(-e^{-x}+\mathrm{Arc}\tan e^{-x}) \quad \text{et} \quad \lambda_2(x)=\frac{1}{4}(-e^{x}+\mathrm{Arc}\tan(e^{x}))$$

© dpic – inpl – mai 1999

et la solution particulière de l'équation complète

$$y_{SP(E_0)} = \frac{1}{4}\left[-1 + e^{x}\text{Arc}\tan(e^{-x}) - e^{-2x} + e^{-3x}\text{Arc}\tan(e^{x})\right]$$

par superposition des solutions

$$y_{SG(E)} = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{-3x} + \frac{1}{4}\left[-1 + e^{x}\text{Arc}\tan(e^{-x}) - e^{-2x} + e^{-3x}\text{Arc}\tan(e^{x})\right] \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Retour

Solution MATH13E13

L'équation différentielle est linéaire du second ordre mais à coefficients variables

• Recherche des solutions sur $]0,+\infty[$

on effectue le changement de variable $t=\sqrt{x}$ ou $x=t^2$

et donc $dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2t}dx$ soit $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2t}$

on pose $y(x)=y(t^2)=z(t)$

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2t}z'(t)$$

$$y''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}z'(t)\right)\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t^2}z'(t)+\frac{1}{t}z''(t)\right)\frac{1}{2t}$$

En reportant dans l'équation différentielle, il reste

$$z''(t)-z(t)=0$$

équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

d'où la solution générale en z

$z(t)=C_1\text{ch}t+C_2\text{sh}t$ avec $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$

et en fonction de x

$y=f_+(x)=C_1\text{ch}\sqrt{x}+C_2\text{sh}\sqrt{x}$ pour $x\in]0,+\infty[$

• Recherche des solutions sur $]-\infty,0[$

on effectue le changement de variable $t=\sqrt{-x}$ ou $-x=t^2$

et donc $dt=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}dx=-\frac{1}{2t}dx$ soit $\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{2t}$

on pose $y(x)=y(-t^2)=z(t)$

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{2t}z'(t)$$

$$y''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2t}z'(t)\right)\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t^2}z'(t)+\frac{1}{t}z''(t)\right)(-\frac{1}{2t})$$

En reportant dans l'équation différentielle, il reste

$$z''(t)+z(t)=0$$

d'où la solution générale en z

$z(t)=C_3\cos t+C_4\sin t$ avec $(C_3,C_4)\in\mathbb{R}^2$

et en fonction de x

$y=f_-(x)=C_3\cos\sqrt{-x}+C_4\sin\sqrt{-x}$ pour $x\in]-\infty,0[$

© dpic – inpl – mai 1999

RACCORDEMENT DE LA SOLUTION EN 0

• Continuité de la solution en 0

$\lim_{x\to 0^+} f_+(x) = C_1$ et $\lim_{x\to 0^-} f_-(x) = C_3$

la solution sera continue en 0 ssi $C_1 = C_3$

• Continuité de la dérivée première en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_+(x)-C_1}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{C_1(\mathrm{ch}\sqrt{x}-1)+C_2\mathrm{sh}\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x}\left(C_2\sqrt{x}+C_1\frac{x}{2}+o(x)\right)$$

la limite est finie ssi $C_2 = 0$, la dérivée à droite en 0 vaut alors $\frac{C_1}{2}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f_-(x)-C_1}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{C_1(\cos\sqrt{-x}-1)+C_4\sin\sqrt{-x}}{x} = \frac{1}{x}\left(C_4\sqrt{-x}+C_1\frac{x}{2}+o(x)\right)$$

la limite est finie ssi $C_4 = 0$, la dérivée à gauche en 0 vaut alors $\frac{C_1}{2}$

• Continuité de la dérivée seconde en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_+'(x)-f_+'(0)}{x-0} = \frac{C_1}{12}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f_-'(x)-f_-'(0)}{x-0} = \frac{C_1}{12}$$

la dérivée seconde est continue en 0

la fonction ainsi obtenue est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

de plus elle satisfait l'équation différentielle en 0

l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est

$$y = f(x) = \begin{cases} C_1\mathrm{ch}\sqrt{x} & \text{si } x \in \left]0,+\infty\right[\\ C_1\cos\sqrt{-x} & \text{si } x \in \left]-\infty,0\right[\end{cases}$$

avec $C_1 \in \mathbb{R}$

Retour

Solution MATH13E14

C'est une équation d'Euler donc de la forme

$$ax^2y''+bxy'+cy=\varphi(x)$$

a, b et c constantes réelles et φ fonction donnée

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$; elle est linéaire et le coefficient de y'' s'annule en 0

On considère

$$I_1=]0,+\infty[\quad \text{et} \quad I_2=]-\infty,0[$$

On cherche des solutions sur I_j pour j prenant les valeurs 1 et 2

Supposons dorénavant j fixé

puisque $y=x^2$ est une solution de l'équation homogène associée, on effectue le changement de fonction inconnue $y=x^2z$ avec z fonction de x

$$y=x^2z$$

$$y'=2xz+x^2z'$$

$$y''=2z+4xz'+x^2z''$$

et en reportant dans l'équation différentielle initiale après simplification, il reste

$$x^4z''+x^3z'=x^2$$

et en divisant les deux membres par x^3

$$xz''+z'=\frac{1}{x}$$

soit $\dfrac{d}{dx}(xz')=\dfrac{1}{x}$

$$z'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln(x)+\dfrac{\lambda_1}{x} & \text{si } x\in I_1=]0,+\infty[\\ \dfrac{1}{x}\ln(-x)+\dfrac{\lambda_2}{x} & \text{si } x\in I_2=]0,+\infty[\end{cases}$$

$$z(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln^2(x)+\lambda_1\ln x+\mu_1 & \text{si } x\in I_1=]0,+\infty[\\ \dfrac{1}{2}\ln^2(-x)+\lambda_2\ln(-x)+\mu_2 & \text{si } x\in I_2=]-\infty,0[\end{cases}$$

© dpic – inpl – mai 1999

y est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^*$ ssi

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2(\frac{1}{2}\ln^2(x) + \lambda_1 \ln x + \mu_1) & \text{si } x \in I_1 =]0, +\infty[\\ x^2(\frac{1}{2}\ln^2(-x) + \lambda_2 \ln(-x) + \mu_2) & \text{si } x \in I_2 =]-\infty, 0[\end{cases}$$

RACCORDEMENT de la SOLUTION EN 0

- Continuité de la solution en 0

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = 0$$

y est prolongeable par continuité en 0 en posant $y(0) = 0$

∗ Continuité de la dérivée première en 0

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = 0$$

y' est prolongeable par continuité en 0 en posant $y'(0) = 0$

- Continuité de la dérivée seconde en 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{y'(x) - y'(0)}{x - 0}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{y'(x) - y'(0)}{x - 0}$ n'existent pas, quelle que soit la valeur des constantes

- Conclusion

il n'existe pas de solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

Retour

© dpic – inpl – mai 1999

Solution MATH13E15

c'est une équation d'Euler donc de la forme

$$ax^2y''+bxy'+cy=\varphi(x)$$

a, b et c constantes réelles et φ fonction donnée

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$; elle est linéaire et le coefficient de y'' s'annule en 0.

On considère:

$$I_1 =]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad I_2 =]0, +\infty[$$

On cherche des solutions sur I_j pour j prenant les valeurs 1 et 2.

Supposons dorénavant j fixé.

L'équation sans second membre est :

$$x^2y''+xy'-4y=0 \quad (II)$$

On cherche des solutions particulières de la forme $y=|x|^r$; on trouve $r=2$ ou $r=-2$.

La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_{SG(II)} = \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \dfrac{\mu_1}{x^2} & \text{si} \quad x \in I_1 =]-\infty, 0[\\ \lambda_2 x^2 + \dfrac{\mu_2}{x^2} & \text{si} \quad x \in I_2 =]0, +\infty[\end{cases}$$

Par la méthode de variation des constantes, on cherche une solution particulière de l'équation complète. On obtient

$$y_{SP(I)} = \begin{cases} x^2 \ln(-x) - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x \in I_1 =]-\infty, 0[\\ x^2 \ln(x) - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x \in I_2 =]0, +\infty[\end{cases}$$

par superposition des solutions

$$y_{SG(I)} = \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \dfrac{\mu_1}{x^2} + x^2 \ln(-x) - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x \in I_1 =]-\infty, 0[\\ \lambda_2 x^2 + \dfrac{\mu_2}{x^2} + x^2 \ln(x) - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x \in I_2 =]0, +\infty[\end{cases}$$

<u>Raccordement de la solution en 0</u> :

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \lim_{x \to 0^-} y(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \mu_1 = \mu_2 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0 \ , \quad \text{pour tout } \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y'(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{y'(x)-y(0)}{x-0} = -\infty \ , \quad \text{pour tout } \lambda_1 = \lambda_2$$

Donc, il n'existe pas de solution de (E) sur R.

Retour

Solution MATH13E16

Equation d'Euler donc de la forme :

$$ax^2y''+bxy'+cy=\varphi(x)$$

a, b et c constantes réelles et φ fonction donnée

L'équation est définie sur $]-1,+\infty[$; elle est linéaire et le coefficient de y" s'annule en 0.

On considère :

$$I_1=]-1,0[\quad \text{et} \quad I_2=]0,+\infty[$$

On cherche des solutions sur I_j pour j prenant les valeurs 1 et 2.

Supposons dorénavant j fixé.

L'équation sans second membre est :

$$x^2y''+4xy'+2y=0 \quad \text{(II)}$$

On cherche des solutions particulières de la forme $y=|x|^r$; on trouve $r=-1$ ou $r=-2$

La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_{SG(II)}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1}{x}+\dfrac{\mu_1}{x^2} & \text{si } x\in I_1=]-1,0[\\[2mm] \dfrac{\lambda_2}{x}+\dfrac{\mu_2}{x^2} & \text{si } x\in I_2=]0,+\infty[\end{cases}$$

par la méthode de variation des constantes, on cherche une solution particulière de l'équation complète. On obtient

$$y_{SP(I)}=\frac{(1+x)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\frac{3}{4} \quad \text{si } x\in]-1,+\infty[$$

par superposition des solutions

$$y_{SG(I)}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1}{x}+\dfrac{\mu_1}{x^2}+\dfrac{(1+x)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\dfrac{3}{4} & \text{si } x\in I_1=]-1,0[\\[2mm] \dfrac{\lambda_2}{x}+\dfrac{\mu_2}{x^2}+\dfrac{(1+x)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\dfrac{3}{4} & \text{si } x\in I_2=]0,+\infty[\end{cases}$$

© dpic – inpl – mai 1999

RACCORDEMENT de la SOLUTION EN 0

- Continuité de la solution en 0

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = 0 \text{ ssi } \mu_1 = \mu_2 = 0 \text{ et } \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

y est prolongeable par continuité en 0 en posant $y(0) = 0$

∗ Continuité de la dérivée première en 0

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = \frac{1}{6}$$

y' est prolongeable par continuité en 0 en posant $y'(0) = \frac{1}{6}$

- Continuité de la dérivée seconde en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = \frac{5}{12}$$

y'' est prolongeable par continuité en 0 en posant $y''(0) = \frac{5}{12}$

- Conclusion

la solution de (E) sur $]-1, +\infty[$ est

$$y = f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2x^2}\left[x - (1+x)^2 \ln(1+x)\right] \text{ avec } f(0) = 0 \;\; f'(0) = \frac{1}{6} \text{ et } f''(0) = \frac{5}{12}$$

Retour

© dpic – inpl – mai 1999

Solution MATH13E17

L'équation proposée (E) n'est pas une équation différentielle.

En remplaçant x par -x dans (E), on obtient : $f''(-x)+f(x)=-x$

D'où le système :

$$\begin{cases} f''(x)+f(-x)=x \\ f''(-x)+f(x)=-x \end{cases}$$

En additionnant membre à membre ces deux équations, puis en les soustrayant, on obtient en tenant compte des notations des fonctions f et g :

$$\begin{cases} [f''(x)+f''(-x)]+[f(x)+f(-x)]=g''(x)+g(x)=0 \\ [f''(x)-f''(-x)]+[f(x)-f(-x)]=h''(x)-h(x)=2x \end{cases}$$

La première équation admet pour solution

$$g(x)=C_1\cos x+C_2\sin x \text{ avec } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

La seconde équation admet pour solution $h(x)=-2x+D_1\text{ch}x+D_2\text{sh}x$ avec $(D_1,D_2)\in\mathbb{R}^2$

et donc puisque

$$f(x)=\frac{1}{2}[g(x)+h(x)]=-x+\frac{1}{2}[C_1\cos x+C_2\sin x+D_1\text{ch}x+D_2\text{sh}x]$$

Etudions la réciproque :

Les solutions f(x) vérifiant l'équation (E) $f''(x)+f(-x)=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ doivent satisfaire

$C_2\sin x+D_1\text{ch}x=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ et donc $C_2=D_1=0$

Les solutions de (E) sont donc :

$$f(x)=-x+\frac{1}{2}[C_1\cos x+D_2\text{sh}x] \text{ avec } (C_1,D_2)\in\mathbb{R}^2$$

Remarque :

Par construction, g est une fonction paire ce qui implique $C_2=0$ et h une fonction impaire ce qui implique $D_1=0$

Retour