12. EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE.

1 Généralités sur les équations différentielles

1.1 Définitions diverses

Donnons la définition la plus générale possible d'une équation différentielle.

Définition

On considère une fonction f de la variable x, n fois dérivable sur un intervalle I de R.
On appelle **équation différentielle**, toute relation entre x, f, f', , $f^{(n)}$

n est appelé **ordre** de l'équation différentielle

Exemple

si $n = 1$, on parlera d'équation différentielle du premier ordre
si $n = 2$, on parlera d'équation différentielle du deuxième ordre

Définition

Intégrer (ou résoudre) une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions f qui vérifient cette relation.

Chacune de ces fonctions s'appelle une **solution**, ou **intégrale** de l'équation différentielle.

Définition

Le graphe de la fonction solution est appelé **courbe intégrale** de l'équation différentielle.

1.2 Le premier ordre

On peut classer les équations différentielles du premier ordre en trois catégories :

- Equations à variables séparables
- Equations homogènes
- Equations linéaires

Dans ce chapitre, nous nous contenterons d'étudier la dernière famille.

2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Définitions

Dans ce qui suit, le terme intervalle désigne un intervalle de *R* non réduit à un point.

Définition

Soit *I* un intervalle de *R* et *a*, *b* et *c* trois fonctions réelles définies et continues dans *I*.

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** toute équation de la forme ou se ramenant à la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad (I)$$

Exemple

- $2xy' + cos(x)y = e^x$ définie sur *R*.
- $2\sqrt{x}y' + x^2y = e^x + sin(x)$ définie sur $[0;+\infty[$.

Définition

Une fonction *y* est **solution** de cette équation différentielle sur *I* si et seulement si *y* est dérivable sur *I* et $\forall x \in I,\ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$

Exemple

L'équation différentielle $y' + y = 2e^x$ admet la fonction *f* définie sur *R* par $f(x) = e^x$ comme solution. En effet, *f* est dérivable sur *R* et $e^x + e^x = 2e^x$.

Définition

L'équation différentielle linéaire du premier ordre est dite **normalisée** si et seulement si $a = 1$ soit : $y' + a(x)y = b(x) \qquad (I)$

Dans tout ce qui suit, on ne considérera que des équations normalisées

Définition

L'équation homogène associée à l'équation (I) (**ou équation sans second membre**) est

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (II)$$

2.2 Résolution de l'équation sans second membre (II).

On pose $y' + a(x)y = 0 \qquad (II)$

On admettra sans démonstration, le théorème suivant :

Théorème

a étant une fonction continue sur *I*, elle admet sur *I* des primitives . Soit *A* une de ces primitives.
L'ensemble des solutions sur *I* de l'équation différentielle (II) est l'ensemble

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \to R \\ x \mapsto Ke^{-A(x)} \quad ; \quad K \in R \end{array} \right\}$$

Exemple

On considère l'équation différentielle définie sur tout intervalle *I* de *R* par :
$\left(1+x^2\right)y' - 2xy = 0 \qquad (I)$

Cette équation peut être normalisée sans problème car $\forall x \in R,\ \left(1+x^2\right) > 0$

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad y' - \frac{2x}{\left(1+x^2\right)}y = 0$$

En appliquant le théorème ci-dessus, on obtient :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} R \to R \\ x \mapsto Ke^{ln\left(1+x^2\right)} \quad ; \quad K \in R \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R \to R \\ x \mapsto K\left(1+x^2\right) \ ; \ K \in R \end{array} \right\}$$

2.3 Résolution de l'équation complète (I)

2.3.1 Théorème général

On admettra sans démonstration, le théorème suivant :

Théorème

La solution générale de l'équation complète (I) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (II) et d'une solution particulière de l'équation complète (I).

$$y_{SG(I)} = y_{SG(II)} + y_{SP(I)}$$

C'est le principe de superposition des solutions (dû à la linéarité de l'équation différentielle).

2.3.2 Recherche d'une solution particulière de l'équation complète (I).

- **Recherche d'une solution évidente**

Avant de se lancer dans un calcul compliqué, on regarde la forme de l'équation différentielle et on essaie de deviner une solution de l'équation complète (I).
Puis on applique le principe de superposition des solutions. Ce même principe s'applique aussi dans le cas où le second membre est la somme de plusieurs fonctions.

Exemple

Soit l'équation différentielle définie sur tout intervalle *I* de *R* par :
$\left(1+x^2\right)y' - 2xy = 1 - x^2$
On « voit » que la fonction $x \mapsto x$ est solution « évidente » de cette équation différentielle.

La solution générale de l'équation différentielle est donc la fonction *f* définie par :
$x \mapsto K\left(1+x^2\right)+x, \quad K \in R$
C'est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Dans le cas où il n'apparaît pas de solution évidente, on applique le principe de variation de la constante.

- **Méthode de variation de la constante**.

On considère l'équation sans second membre définie sur un intervalle *I* de *R*, avec *a* continue sur *I* : $y' + a(x)y = 0 \qquad (II)$

(Cette méthode n'est valable que pour des équations linéaires)

On considère la solution générale de l'équation sans second membre :
$x \mapsto Ke^{-A(x)}, \ K \in R$ où *A* est une primitive de *a* sur *I*

Supposons que la constante *K* soit une fonction de *x* dérivable sur *I* et que la fonction $x \mapsto K(x)e^{-A(x)}$ soit solution de (I)

En dérivant la fonction *y* et en reportant dans (I), les calculs se simplifient et l'on déduit $K'(x)$ puis $K(x)$ par primitivation et enfin la solution particulière *y*.

Exemple

On considère l'équation différentielle définie sur tout intervalle $I \subset]0;+\infty[$ par

$$y' + \frac{x-1}{x} y = x^2 \qquad (I)$$

Cette équation est normalisée.

- On résout l'équation sans second membre $y' + \frac{x-1}{x} y = 0$

  Une primitive de $x \mapsto \frac{x-1}{x}$ sur I est : $x \mapsto x - ln(x)$

  Donc la solution générale est la fonction $x \mapsto Ke^{-x+ln(x)}$, $K \in R$ soit : $x \mapsto Kxe^{-x}$, $K \in R$

- On cherche une solution particulière de l'équation complète en utilisant la méthode de variation de la constante. On suppose que K est dérivable sur I et que $y : x \mapsto K(x)xe^{-x}$ est solution de l'équation complète.

  Cela donne :

  $y'(x) = K'(x)xe^{-x} + K(x)\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)$

  On remplace dans (I)

  $K'(x)xe^{-x} + K(x)\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) + \frac{x-1}{x} K(x)xe^{-x} = x^2$

  Comme prévu, les termes en K s'éliminent, il reste alors :

  $K'(x)xe^{-x} = x^2 \Leftrightarrow K'(x) = xe^{x}$

  On intègre maintenant cette équation différentielle : $K(x) = (x-1)e^{x} + \lambda, \lambda \in R$

  La fonction : $y : x \mapsto (x-1)e^{x}xe^{-x} = x(x-1)$ est solution particulière de l'équation différentielle complète.

- La solution générale est donc la fonction $y : x \mapsto x(x-1) + Kxe^{-x}$, $K \in R$

2.4 Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale (problème de Cauchy)

Théorème

Pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times R$, il existe une solution et une seule y de (I) sur I telle que : $y(x_0) = y_0$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle définie sur tout intervalle I de R par :

$y' + 2xy = 2x \quad et \quad y(0) = 2$

L'équation est linéaire et normalisée.

- L'équation sans second membre est : $y' + 2xy = 0 \qquad (E_0)$
  La fonction $x \mapsto 2x$ est continue sur I et admet donc des primitives sur I, la solution générale de l'équation sans second membre est donc la fonction $y_1 : x \mapsto Ke^{-x^2}, \quad K \in R$

- La fonction constante $y_2 : x \mapsto 1$ est solution évidente de l'équation différentielle complète.

- Le principe de superposition des solutions donne la solution générale f de l'équation différentielle sur I : $f \ : \ x \mapsto 1 + Ke^{-x^2}$

- En tenant compte de la condition initiale $y(0) = f(0) = 2$
  On obtient : $\lambda + 1 = 2 \iff \lambda = 1$
  La solution de l'équation différentielle qui vérifie sur I : $y(0) = 2$ est donc la fonction définie sur I par : $x \mapsto e^{-x^2} + 1$

Exercice (MATH12E01A)

Résoudre sur tout intervalle I de R l'équation différentielle :
$\sqrt{1+x^2}\, y' - y = 0 \quad et \quad y(1) = 1$

2.5 Problème des raccords.

Dans les paragraphes précédents, nous n'avons traité que le cas de l'équation différentielle normalisée : $y' + a(x)y = b(x) \qquad (I)$
Nous allons maintenant traiter le cas général : $a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad (I)$

Définition

On dit qu'une solution est **maximale** sur un intervalle $]a,b[$ si elle n'est pas prolongeable sur un intervalle plus grand que $]a,b[$.
On s'appliquera à rechercher les solutions maximales

Théorème

Considérons l'équation différentielle définie sur un intervalle I de R : $a(x)y'+b(x)y=c(x) \quad (I)$

On suppose que sur cet intervalle I la fonction a s'annule en un réel et un seul x_0

y est solution de l'équation différentielle (I) sur I si et seulement si :

- La restriction y_1 de y à $J_1 =]-\infty, x_0[\cap I$ est solution de (I) sur J_1
- La restriction y_2 de y à $J_2 =]x_0;+\infty[\cap I$ est solution de (I) sur J_2
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} y_1(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} y_2(x) = l$
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{y_1(x)-l}{x-x_0} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{y_2(x)-l}{x-x_0} = l'$
- $a(x_0)l'+b(x_0)l = c(x_0)$

On procède ainsi au raccordement des solutions sur l'intervalle I entier. On s'assure que y est continue en x_0, dérivable en x_0 et que le point $(x_0, y(x_0))$ vérifie l'équation différentielle pour la valeur $y'(x_0)$ de la dérivée y'.

Exemple

Résoudre et déterminer éventuellement une solution sur R de :

$$xy'+2y = \frac{x}{1+x^2} \qquad (I)$$

L'équation est définie sur R; elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en 0.

On considère les deux intervalles : $I_1 =]-\infty,0[\quad et \quad I_2 =]0,+\infty[$

On cherche des solutions sur I_j pour j prenant les valeurs 1 et 2.

Supposons dorénavant j fixé.

- **Première étape** : résolution de l'équation sans second membre.
  L'équation sans second membre est : $xy'+2y=0 \quad (II)$
  On peut sur chacun des intervalles écrire l'équation normalisée associée :
  $y'+\dfrac{2}{x}y=0 \quad (II)$
  La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ est continue sur chacun des intervalles et admet donc par exemple $x \mapsto ln\left(x^2\right)$ comme primitive.

La solution générale de (II) est donc la fonction y définie par :

$$y = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{x^2} & si \quad x \in I_1 = \left]-\infty, 0\right[\\ \dfrac{\lambda_2}{x^2} & si \quad x \in I_2 = \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

- **Deuxième étape** : solution particulière de l'équation complète.
  Cherchons une solution particulière de (I) , en utilisant la méthode de variation de la constante

  $y = \dfrac{\lambda(x)}{x^2}$ et $y'(x) = \dfrac{\lambda'(x)x^2 - 2\lambda(x)x}{x^4}$

  en reportant dans l'équation (I), il reste après simplification

  $\lambda'(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$

  d'où on tire une primitive : $\lambda(x) = x - Arc\tan x$

  Une solution particulière est donc la fonction définie par :

  $y_0 = \dfrac{x - Arc\tan x}{x^2}$

- **Troisième étape** : solution générale obtenue par superposition des solutions

  $$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - Arc\tan x + \lambda_1}{x^2} & si \quad x \in I_1 = \left]-\infty, 0\right[\\ \dfrac{x - Arc\tan x + \lambda_2}{x^2} & si \quad x \in I_2 = \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

- **Raccordement sur *R***

  Pour obtenir une solution sur *R*, il faut "raccorder " les solutions en 0.

  - *Continuité de la solution en 0*

    Le dénominateur tend vers 0 lorsque x tend vers 0, une condition nécessaire pour obtenir une limite finie est que le numérateur tende aussi vers 0, soit donc : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

    Choisissons les deux constantes λ_1 *et* λ_2 nulles et considérons la fonction f définie par: $\forall x \in R^*, \quad f(x) = \dfrac{x - Arc\tan x}{x^2}$

    Le développement limité de la fonction f à l'ordre 1 au voisinage de 0 est

    $f(x) = \dfrac{x}{3} + o(x)$

    $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, on peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$

- *Dérivabilité en 0*

  On obtient : $\dfrac{f(x)-0}{x-0}=\dfrac{1}{3}+o(1)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-0}{x-0}=\dfrac{1}{3}$

  On pose $f'(0)=\dfrac{1}{3}$

- Reportons dans l'équation les valeurs trouvées en 0, pour constater que le point $(0;0)$ est un point d'une courbe intégrale, avec une tangente de pente $\dfrac{1}{3}$.

Conclusion : $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-Arc\tan x}{x^2} & si\ \ x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[\\ 0 & si\ \ x=0\end{cases}$

avec $f'(0)=\dfrac{1}{3}$ est l'unique solution sur *R*.

Exercice (MATH12E02A)

Résoudre l'équation différentielle $xy'-3y=x^5 \quad (I)$

Existe-t-il des solutions de l'équation sur *R* ?

3 Exemples divers

3.1 Exemple 1

Exemple

Résolvons l'équation différentielle $x^2y'+y=1$

L'équation est définie sur *R*; elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en 0.

On étudie donc l'équation différentielle sur les intervalles $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$

Sur chaque intervalle, on peut donner la forme normalisée : $y'+\dfrac{1}{x^2}y=\dfrac{1}{x^2}$

- **Résolution de l'équation homogène** $y'+\dfrac{1}{x^2}y=0$:

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur chacun des ces deux intervalles. Elle y admet donc des primitives. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est une de ces primitives.

La solution de l'équation homogène est donc :

$$\begin{cases} y = \lambda_1 e^{\frac{1}{x}} & sur \quad]-\infty; 0[\\ y = \lambda_2 e^{\frac{1}{x}} & sur \quad]0; +\infty[\end{cases}$$

(λ_1, λ_2 réels indépendants l'un de l'autre).

- **Recherche d'une solution particulière**. La fonction constante $x \mapsto 1$ est une solution particulière évidente de l'équation complète.
- **Solution générale de l'équation complète**. En appliquant le principe de superposition des solutions, l'ensemble des solutions de (I) est

$$y = f(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{\frac{1}{x}} + 1 & si \quad x \in \,]-\infty, 0[\\ \lambda_2 e^{\frac{1}{x}} + 1 & si \quad x \in \,]0, +\infty[\end{cases}$$

- **Raccordement des solutions en 0 :**

  - *Continuité de la fonction en 0*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\lambda_1 e^{\frac{1}{x}} + 1 \right) = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\lambda_2 e^{\frac{1}{x}} + 1 \right) = 1 \iff \lambda_2 = 0$$

  On peut donc prolonger les solutions par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$

  - *Dérivabilité en 0*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\frac{\lambda_1}{x} e^{\frac{1}{x}} \right) = 0 \quad et \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0$$

  Le prolongement sera dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

  - *Vérification dans l'équation différentielle* : $0 \times 0 + 1 = 1$

L'ensemble des solutions de l'équation complète sur *R* est donc :

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 + \lambda e^{\frac{1}{x}} & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases} \text{ avec } f'(0) = 0$$

Exercice **(MATH12E03A)**

Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = e^x \quad (E)$

Existe-t-il des solutions de l'équation sur R ?

3.2 Exemple 2

Soit l'équation différentielle : $(1 - x^2)y' + xy = 1$

Existe-t-il des solutions de l'équation sur R ?

Le coefficient de y' s'annule pour $x = -1 \ et \ x = 1$.
intégrons l'équation sur chacun des intervalles
$I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$

On se place sur l'un des ces trois intervalles.

On peut alors écrire l'équation normalisée : $y' + \dfrac{x}{(1-x^2)}y = \dfrac{1}{(1-x^2)}$

- **Résolution de l'équation homogène** : $y' + \dfrac{x}{(1-x^2)}y = 0$

  La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$ est continue sur chaque intervalle et y admet donc des primitives. Soit $x \mapsto \dfrac{1}{2} ln\left|1 - x^2\right|$ une de ces primitives.
  La solution générale de l'équation homogène est donc :

  $$y_0 = \begin{cases} \lambda_1 \sqrt{x^2 - 1} & si \quad x \in I_1 =]-\infty, -1[\\ \lambda_2 \sqrt{1 - x^2} & si \quad x \in I_2 =]-1, 1[\\ \lambda_3 \sqrt{x^2 - 1} & si \quad x \in I_3 =]1, +\infty[\end{cases}$$

  $\lambda_1, \lambda_2 \ et \ \lambda_3$ étant des constantes réelles indépendantes.

- **Recherche d'une solution particulière.** On remarque une solution évidente : $x \mapsto x$

- **Solution générale de l'équation complète.**

En utilisant le principe de superposition des solutions :

$$y(x)=\begin{cases}\lambda_1\sqrt{x^2-1}+x & sur\ \ I_1=]-\infty,-1[\\ \lambda_2\sqrt{1-x^2}+x & sur\ \ I_2=]-1,1[\\ \lambda_3\sqrt{x^2-1}+x & sur\ \ I_3=]1,+\infty[\end{cases}$$

$\lambda_1,\ \lambda_2\ \ et\ \ \lambda_3$ étant des constantes réelles.

On cherche maintenant à raccorder les solutions en –1 et en 1

- **Raccordement en –1**

  - Continuité de la solution en –1

    $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-1$

  - Dérivabilité en –1

    $$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{\lambda_1\sqrt{x^2-1}+x-(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(\lambda_1\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)+1.$$

    Admet une limite 1 si et seulement si $\lambda_1=0$

    $$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{\lambda_2\sqrt{1-x^2}+x-(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(\lambda_2\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\right)+1$$

    Admet une limite 1 si et seulement si $\lambda_2=0$

  - Vérification dans l'équation différentielle.

    $\left(1-(-1)^2\right)\times1+(-1)(-1)=1$

    Conclusion : la fonction $x\mapsto x$ est solution sur $]-\infty;1[$

- **Raccordement en 1**

  - Continuité de la solution en 1

    $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=1$

  - Dérivabilité de *f* en 1

    Comme pour le raccordement en –1, on montre que

    $$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1\iff\lambda_2=\lambda_3=0$$

    On vérifie que la fonction $x\mapsto x$ vérifie bien l'équation différentielle sur R

Exercice **(MATH12E04A)**

Résoudre l'équation différentielle $|x|y' + (x-1)y = x^2$.
Existe-t-il des solutions de l'équation sur R ?

1.3 Exemple 3

Résolvons l'équation différentielle $x(x-1)y' + (x+1)y = \dfrac{x(x+1)}{x^2 - x + 1}$

L'équation est définie sur R; elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en 0 et -1.
On considère les intervalles : $I_1 =]-\infty, 0[\quad I_2 =]0,1[\quad et \quad I_3 =]1,+\infty[$
On cherche des solutions sur I_j pour *j* prenant les valeurs 1, 2 et 3.
Supposons dorénavant *j* fixé.

On peut alors considérer l'équation normalisée : $y' + \dfrac{(x+1)}{x(x-1)}y = \dfrac{(x+1)}{(x-1)(x^2-x+1)}$

- **Résolvons l'équation sans second membre** : $y' + \dfrac{(x+1)}{x(x-1)}y = 0$

  La fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1}$ est continue sur I_j et admet sur cet intervalle des primitives, dont une est la fonction : $x \mapsto ln\dfrac{(x-1)^2}{x}$

  La solution générale de l'équation homogène est donc sur I_j :

  $y_0 = Ke^{-ln\frac{(x-1)^2}{x}} = K\dfrac{x}{(x-1)^2}$, soit finalement :

$$y_0 = \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{x}{(x-1)^2} & sur \ I_1 =]-\infty, 0[\\ \lambda_2 \dfrac{x}{(x-1)^2} & sur \ I_2 =]0,1[\\ \lambda_3 \dfrac{x}{(x-1)^2} & sur \ I_3 =]1,+\infty[\end{cases}$$

- **Solution particulière de l'équation complète**.

  Ne remarquant pas de solution évidente, utilisons la méthode de variation de la constante

$$y = \lambda(x)\frac{x}{(x-1)^2}$$

$$y' = \lambda'(x)\frac{x}{(x-1)^2} + \lambda(x)\frac{-x-1}{(x-1)^3}$$

Soit en reportant dans l'équation, il reste après simplification

$$\lambda'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x\left(x^2-x+1\right)} = -\frac{1}{x} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

Soit : $\lambda(x) = -ln|x| + ln\left(x^2-x+1\right)$

On obtient donc une solution particulière : $y = \dfrac{x}{(x-1)^2} ln\dfrac{x^2-x+1}{|x|}$

- **Solution générale :**

En utilisant le principe de superposition des solutions

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(x-1)^2}\left(\lambda_1 + ln\dfrac{x^2-x+1}{-x}\right) & sur\ I_1 = \left]-\infty, 0\right[\\ \dfrac{x}{(x-1)^2}\left(\lambda_1 + ln\dfrac{x^2-x+1}{x}\right) & sur\ I_2 = \left]0, 1\right[\\ \dfrac{x}{(x-1)^2}\left(\lambda_1 + ln\dfrac{x^2-x+1}{x}\right) & sur\ I_3 = \left]1, +\infty\right[\end{cases}$$

On cherche maintenant à raccorder les solutions en 0 et en 1

- **Raccordement en 0**

  - Continuité en 0 : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$

    la continuité des solutions en 0 est réalisée quelles que soient les constantes $\lambda_1\ et\ \lambda_2$,

  - Dérivabilité en 0 : la solution n'est pas dérivable en 0 car

    $$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1}{(x-1)^2}\left(\lambda_2 + ln\frac{x^2-x+1}{x}\right) = -\infty.$$

Il n'existe donc pas de solution de l'équation sur $\left]-\infty, 1\right[= I_1 \cup \{0\} \cup I_2$ et à fortiori il n'y a pas de solution sur R.

- **Raccordement en 1**

  - Continuité en 1

    au voisinage de 1 on pose $x-1=h \ \ ou \ \ x=1+h$:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{x}{(x-1)^2}\left(\lambda_2+ln\frac{x^2-x+1}{x}\right)\right)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\left(\frac{1+h}{h^2}\left(\lambda_2+ln\frac{1+h+h^2}{1+h}\right)\right)$$

$$Or \ \ \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\left(\frac{1+h}{h^2}ln\frac{1+h+h^2}{1+h}\right)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\left(\frac{ln\left(1+\dfrac{h^2}{1+h}\right)}{\dfrac{h^2}{1+h}}\right)=1$$

Donc *f* admet une limite 1 en 1 si et seulement si $\lambda_2=0$

De même on a : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=1$ si et seulement si $\lambda_3=0$

Donc: $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=0 \ \Leftrightarrow\ \lambda_2=\lambda_3=0$

On peut donc prolonger les solutions en 1 en posant $f(1)=1$,

  - Dérivabilité en 1 :

    toujours au voisinage de 1 on a:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{(x-1)^2}ln\frac{x^2-x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h^2}ln\frac{1+h+h^2}{1+h}-\frac{1}{1+h}\right)=0$$

le prolongement sera dérivable en 1 et $f'(1)=0$

  - Vérification dans l'équation :

$$0+(1+1)1=\frac{1(1+1)}{1^2-1+1}$$

Il existe donc une solution de l'équation différentielle sur $\left]0,+\infty\right[=I_2\cup\{1\}\cup I_3$

définie par : $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}ln\dfrac{x^2-x+1}{x}$

Exercices d'entraînement avec solutions.

Exercice (MATH12E05)

Résoudre sur R l'équation différentielle $\left(1+x^2\right)y'-xy=1+x^3$

Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2.

Exercice (MATH12E06)

Résoudre sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle : $y'+y\tan x=\sin 2x$

Exercice (MATH12E07)

Résoudre l'équation différentielle $2xy'-3y=\sqrt{x}$. Existe-t-il des solutions sur R.

Exercice (MATH12E08)

Résoudre sur R l'équation différentielle :

$\left(1+|x|\right)y'-y=0$, avec la condition : $y\left(-1\right)=1$

Exercice (MATH12E09)

Résoudre sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle : $y'\cos x+y\sin x=x+\sin x\cos x$ **.**

Existe-t-il une solution sur $\left[0;\pi\right]$?.

Exercice (MATH12S01)

Résoudre sur l'équation différentielle sur l'intervalle $]-1;-\infty[$

$(x+1)y'-2y=(x+1)^4$

Est-il possible de trouver une solution définie sur R?

Exercice (MATH12S02)

Résoudre l'équation différentielle $xy'-y=x$ sur chacun l'intervalle $]0;+\infty[$.

Est-il possible de trouver une solution définie sur R?

Solution (MATH12E05)

L'équation différentielle peut se mettre sous la forme normalisée :

$$y' - \frac{x}{1+x^2}\, y = \frac{1+x^3}{1+x^2}$$

- **Equation sans second membre**.

  La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est continue sur R et admet donc des primitives, en particulier la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2} ln\left(1+x^2\right) = ln\sqrt{1+x^2}$. La solution générale de l'équation sans second membre est donc la fonction définie par :

  $$y_0 = \lambda\sqrt{1+x^2}, \qquad \lambda \in R$$

- **Solution particulière** :

  On cherche une solution particulière (d'après l'énoncé) sous forme d'un polynôme de degré deux (en effet, le terme en y est multiplié par x et le second membre est un polynôme du troisième degré).

  On pose : $y = ax^2 + bx + c \quad avec \quad y' = 2ax + b$

  En reportant dans l'équation différentielle initiale, on obtient :

  $$\left(1+x^2\right)(2ax+b) - x\left(ax^2+bx+c\right) = 1+x^3 \Leftrightarrow ax^3 + (2a-c)x + b = 1+x^3$$

  par identification on obtient : $a = 1,\ b = 1\ et\ c = 2$. La solution particulière est donc la fonction : $x \mapsto y_0 = x^2 + x + 2$

- **Solution générale :**

  Le principe de superposition des solutions donne pour solution générale :

  $$x \mapsto y = \lambda\sqrt{1+x^2} + x^2 + x + 2, \quad \lambda \in R$$

Retour

Solution (MATH12E06)

L'équation est déjà sous forme normalisée.

- **Equation sans second membre** :

  $y' + y\tan x = 0$

  La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et admet donc sur cet intervalle des primitives, en particulier, la fonction : $x \mapsto -\ln(\cos x)$

  La solution générale de l'équation homogène associée est donc la fonction

  $x \mapsto y_0 = \lambda \cos x,\ \ \lambda \in R$

- **Solution particulière.**

  Cherchons une solution particulière de l'équation complète en utilisant la méthode de variation de la constante.

  $y = \lambda(x)\cos x \quad et \quad y' = \lambda'(x)\cos x - \lambda(x)\sin x$

  On reporte dans l'équation initiale et après simplification, on obtient :

  $\lambda'(x) = 2\sin x \quad soit \quad \lambda(x) = -2\cos x$

  La solution particulière est donc la fonction : $y_{0\,:}\ x \mapsto -2\cos^2 x$

- **Solution générale :**

  En appliquant le principe de superposition des solutions, la solution générale de l'équation différentielle complète est donc la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = -2\cos^2 x + \lambda \cos x,\ \ \lambda \in R$

Retour

Solution (MATH12E07)

L'équation est définie sur $\left[0,+\infty\right[$; elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en 0. On se place sur l'intervalle $I=\left]0,+\infty\right[$.

L'équation normalisée devient : $y'-\dfrac{3}{2x}y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

- **Equation sans second membre**: $y'-\dfrac{3}{2x}y=0$

  La fonction $x\mapsto-\dfrac{3}{2x}$ est continue sur I, elle admet donc des primitives sur cet intervalle, en particulier : $x\mapsto-\dfrac{3}{2}\ln x$.

  La solution générale de l'équation homogène est donc la fonction :
  $y_0 : x\mapsto\lambda x^{3/2},\quad \lambda\in R$

- **Solution particulière**

  On peut deviner une solution particulière de la forme $x\mapsto K\sqrt{x}$
  (Sinon il faut utiliser la méthode de variation de la constante)

En reportant dans l'équation, on obtient : $2x\dfrac{K}{2\sqrt{x}}-3K\sqrt{x}=\sqrt{x}\Rightarrow K=-\dfrac{1}{2}$

Soit la solution particulière : $x\mapsto-\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$

- **Solution générale :**

En utilisant le principe de superposition des solutions, on obtient la solution générale de l'équation différentielle sur l'intervalle $I=\left]0,+\infty\right[$

$$x\mapsto y=\lambda x^{3/2}-\frac{1}{2}\sqrt{x},\quad \lambda\in R$$

Remarque

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\lambda x^{3/2}-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\lambda x^{1/2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

Donc l'ensemble des solutions sur $\left[0,+\infty\right[$ est vide.

Retour

Solution (MATH12E08)

L'équation est définie sur R; elle est linéaire et le coefficient de y' ne s'annule pas. On peut donner la forme normalisée.

L'équation différentielle s'écrit

$$y' - \frac{1}{1+|x|} y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y' - \dfrac{1}{1-x} y = 0 & sur \ \left]-\infty;0\right[\\ y' - \dfrac{1}{1+x} y = 0 & sur \ \left[0;+\infty\right[\end{cases}$$

On obtient alors la solution générale de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y = \dfrac{\lambda_1}{1-x} & sur \ \left]-\infty;0\right[\\ y = \lambda_2 (1+x) & sur \ \left]0;+\infty\right[\end{cases}$$

où λ_1 *et* λ_2 sont des réels.

La condition initiale impose $\lambda_1 = 2$

Raccordement en 0 :

- Continuité en 0 :

  La fonction est continue en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = f(0) = 2$

- Dérivabilité en 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\dfrac{2}{1-x} - 2}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(2 \frac{1}{1-x} \right) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{2(1+x) - 2}{x} = 2$$

Finalement, on obtient la solution *f* définie sur *R* et vérifiant la condition initiale

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1-x} & sur \ \left]-\infty;0\right[\\ 2 & si \ \ x = 0 \\ 2(x+1) & sur \ \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

Retour

Solution (MATH12E09)

Sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ on peut mettre l'équation différentielle sous sa forme normalisée : $y' + y\tan x = \frac{x}{\cos x} + \sin x$

- **Equation sans second membre**

  La solution générale de l'équation homogène associée est donc la fonction $x \mapsto y_0 = \lambda\cos x,\ \ \lambda \in R$ (confère l'exercice MATH12E06)

- **Solution particulière.**

  On peut faire varier la constante ou remarquer que la fonction $x \mapsto x\sin x$ est solution « évidente ».

- **Solution générale**.

  La solution générale de l'équation différentielle sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ est donc la fonction *f* définie par : $f(x) = x\sin x + \lambda_1\cos x,\quad \lambda_1 \in R$

On en déduit sur $]0;\pi[$ l'ensemble des solutions *f* définie par :

$$y = f(x) = \begin{cases} x\sin x + \lambda_1\cos x & sur\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\\ x\sin x + \lambda_2\cos x & sur\ \left]\frac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases}$$

Raccordement en $\frac{\pi}{2}$

- Continuité en $\frac{\pi}{2}$

  $$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

  On pose donc $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Dérivabilité de *f* en $\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} (\sin x + x \cos x - \lambda_1 \sin x) = 1 - \lambda_1$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} (\sin x + x \cos x - \lambda_2 \sin x) = 1 - \lambda_2$$

le prolongement est donc dérivable si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0;\pi]$ est donc l'ensemble des fonctions $f:\ x \mapsto y = f(x) = x \sin x + \lambda \cos x, \quad \lambda \in R$

Retour

Exercice (MATH12E01B)

Résoudre sur tout intervalle I de R l'équation différentielle :

$y' - y = -x + 1 \quad et \quad y(0) = 1$

Exercice (MATH12E01C)

Résoudre sur tout intervalle I de R l'équation différentielle :

$$\left(1+x^2\right)y' + xy = x\,,\quad et \quad y\left(0\right) = 2$$

Exercice (MATH12E02B)

Résoudre l'équation différentielle $xy' + 3y = x^2$

Existe-t-il des solutions de l'équation sur R ?

Exercice (MATH12E02C)

Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = x^2 \, Arc\tan x$

Existe-t-il des solutions définies sur R ?

Exercice (MATH12E03B)

Résoudre l'équation différentielle $xy' - (x+1)\,y + e^{x}\left(x^{2}+1\right) = 0$

On se placera sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Question facultative : Existe-t-il des solutions de l'équation sur R ?

Exercice (MATH12E03C)

Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

On se placera sur l'intervalle $]0;1[$.

Question facultative : Existe-t-il des solutions de l'équation sur R ?

Exercice (MATH12E04B)

Résoudre l'équation différentielle $x(x+1)y' + y = Arc\tan x$

On se placera sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Question facultative : Existe-t-il des solutions de l'équation sur R ?

Exercice (MATH12E04C)

Résoudre l'équation différentielle $x\left(x^2-1\right)y' + 2y = x^2$

On se placera sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Question facultative : Existe-t-il des solutions de l'équation sur R ?

Solution (MATH12E01A)

La fonction $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule jamais. L'équation différentielle est donc définie sur R.

C'est une équation du premier ordre, linéaire et homogène (sans second membre).
On peut l'exprimer sous sa forme normalisée : $y' - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} y = 0$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur R, elle admet donc des primitives sur R, en particulier, la fonction $x \mapsto ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

La solution de l'équation différentielle est donc la fonction f définie sur R par :
$f(x) = \lambda\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ où λ est un réel quelconque.

En tenant compte de la condition initiale au point $x_0 = 1$

$$f(1) = 1 = \lambda\left(1+\sqrt{2}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

La solution Y de l'équation différentielle satisfaisant à la condition initiale : $Y(1) = 1$ est la fonction Y définie sur R par : $Y(X) = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{2}}$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice

Retour

Solution (MATH12E01B)

L'équation est définie sur R. Elle est linéaire et le coefficient de y' ne s'annule pas.

- **Résolution de l'équation** sans second membre $y' - y = 0$

  La solution générale de cette équation différentielle est la fonction définie sur R par : $y_0 = \lambda e^x$

- **Solution particulière**

  On remarque une solution particulière évidente de l'équation complète définie sur R par $x \mapsto x$

- **Solution générale de l'équation** complète :
  Le principe de superposition des solutions donne la solution générale de l'équation différentielle : $y = f(x) = \lambda e^x + x$, où λ est un réel quelconque.

En tenant compte de la condition initiale

$$y(0) = f(0) = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

La solution de l'équation différentielle qui satisfait à la condition initiale $f(0) = 1$ est donc la fonction f définie sur R par : $f(x) = e^x + x$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice

Retour

Solution (MATH12E01C)

L'équation est définie sur R. Elle est linéaire et le coefficient de y' ne s'annule pas. On peut donner la forme normalisée de l'équation : $y' + \frac{x}{\left(1+x^2\right)} y = \frac{x}{\left(1+x^2\right)}$

- **Résolvons l'équation** sans second membre : $y' + \frac{x}{\left(1+x^2\right)} y = 0$.

  La fonction $x \mapsto \frac{x}{\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\left(1+x^2\right)}$ continue sur R admet des primitives, en particulier, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} ln\left(1+x^2\right) = ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$.

  La solution générale de l'équation homogène est donc la fonction définie par :
  $y_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$ où λ est un réel quelconque.

- **Solution particulière**

  On remarque la solution particulière évidente de l'équation complète : $x \mapsto 1$

- **Solution générale :**

  Le principe de superposition des solutions donne la solution générale f de l'équation complète définie par :
  $$y = f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} + 1$$

En tenant compte de la condition initiale

$$f(0) = 2 \iff 2 = \frac{\lambda}{1} + 1 \iff \lambda = 1$$

La solution Y de l'équation qui satisfait à la condition initiale est définie sur R par :

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH12E02 A)

L'équation est définie sur R. Elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en 0.
On considère les deux intervalles : $I_1 =]-\infty,0[$ *et* $I_2 =]0,+\infty[$

On cherche des solutions sur I_j pour *j* prenant les valeurs 1 et 2.
Supposons dorénavant *j* fixé. On donne sur I_j la forme normalisée de l'équation différentielle : $y' - \frac{3}{x}y = x^4$

- **Equation sans second membre** : $y' - \frac{3}{x}y = 0$

  L'application $x \mapsto \frac{3}{x}$ est définie et continue sur I_j, elle admet donc des primitives sur chacun de ces intervalles, en particulier, la fonction $x \mapsto ln\left(|x|^3\right)$

  La solution générale y_0 de l'équation homogène est donc : $x \mapsto \lambda e^{ln\left|x^3\right|} = \lambda\left|x^3\right|$

  Soit : $y_0 = \begin{cases} \lambda_1 x^3 & sur \quad I_1 =]-\infty,0[\\ \lambda_2 x^3 & sur \quad I_2 =]0,+\infty[\end{cases}$ λ_1 *et* λ_2 sont des réels quelconques.

- **Solution particulière** de l'équation complète.

  En regardant la forme de l'équation complète, on cherche une solution sous la forme : $y = Kx^5$ *avec* $y' = 5Kx^4$

  En remplaçant dans l'équation, on obtient : $5Kx^5 - 3Kx^5 = x^5 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

- **Solution générale** :

  En utilisant le principe de superposition des solutions, la solution générale de l'équation différentielle est définie sur R^* par :

$$y = f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^3 + \dfrac{x^5}{2} & sur \quad I_1 =]-\infty,0[\\ \lambda_2 x^3 + \dfrac{x^5}{2} & sur \quad I_2 =]0,+\infty[\end{cases}$$

  où λ_1 *et* λ_2 sont des constantes réelles.

Raccordement en 0.

- Continuité de la fonction en 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left[\lambda_1 x^3 + \frac{x^5}{2}\right] = 0 \ et \ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[\lambda_2 x^3 + \frac{x^5}{2}\right] = 0$$

la fonction *f* est donc continue en 0 et $f(0) = 0$

- Dérivabilité en 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\lambda_1 x^2 + \frac{x^4}{2}\right) = 0 \ et \ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\lambda_2 x^2 + \frac{x^4}{2}\right) = 0$$

la fonction est donc dérivable en 0 quel que soient les réels $\lambda_1 \ et \ \lambda_2$ et $f'(0) = 0$

- On vérifie que l'équation différentielle est satisfaite en 0 avec les conditions exprimées ci-dessus.

Conclusion :

La fonction *f* définie sur *R* par :

$$y = f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^3 + \dfrac{x^5}{2} & sur \ \ I_1 = \left]-\infty, 0\right[\\ 0 & si \quad x = 0 \\ \lambda_2 x^3 + \dfrac{x^5}{2} & sur \ \ I_2 = \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

avec $f'(0) = 0$ représente l'ensemble des fonctions continues, dérivables sur *R* vérifiant l'équation différentielle

Remarque

On peut aussi utiliser les développements limités pour étudier le raccordement des solutions

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice

Retour

Solution (MATH12E02B)

L'équation est définie sur *R*; elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en 0.
On considère les deux intervalles de *R* : $I_1 =]-\infty,0[$ *et* $I_2 =]0,+\infty[$
On cherche des solutions sur I_j pour *j* prenant les valeurs 1 et 2.
Supposons dorénavant *j* fixé.

On peut alors exprimer l'équation sous la forme normalisée : $y' + \frac{3}{x} y = x$

- **Equation sans second membre** :

  La fonction $x \mapsto \frac{3}{x}$ est continue sur I_j et admet donc des primitives sur cet intervalle, en particulier : $x \mapsto ln\left(|x|^3\right)$

  La solution générale de l'équation différentielle est donc la fonction y_0 définie par : $x \mapsto Ke^{ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|^3\right)} = \frac{K}{|x|^3}$

  Soit : $y_0 = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{x^3} \quad sur \quad I_1 =]-\infty,0[\\ \dfrac{\lambda_2}{x^3} \quad sur \quad I_2 =]0,+\infty[\end{cases}$

- **Solution particulière** :

  Bien que de façon « intuitive », on conjecture une solution particulière de la forme $x \mapsto Kx^2$, utilisons la méthode de variation de la constante

  On pose $y = \frac{\lambda(x)}{x^3} \quad avec \quad y' = \frac{\lambda'(x)}{x^3} - \frac{3\lambda(x)}{x^4}$

  On remplace dans l'équation de départ et il reste après simplification :

  $\lambda'(x) = x^4 \quad d'où \quad \lambda(x) = \frac{x^5}{5}$ d'où $y(x) = \frac{x^2}{5}$

- **Solution générale de l'équation complète**

  En utilisant le principe de superposition des solutions

  $$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{x^3} + \dfrac{x^2}{5} \quad sur \quad I_1 =]-\infty,0[\\ \dfrac{\lambda_2}{x^3} + \dfrac{x^2}{5} \quad sur \quad I_2 =]0,+\infty[\end{cases}$$

Raccordement des solutions en 0

- Continuité de la fonction en 0.

  Il apparaît évident qu'une limite ne peut exister que si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, on a alors $f(0) = 0$

- Dérivabilité en 0.

  $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{x}{5}\right) = 0 \quad et \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{x}{5}\right) = 0$$

  On peut poser $f'(0) = 0$

- On vérifie que l'équation différentielle est satisfaite en 0

Conclusion, la fonction définie par $y = f(x) = \dfrac{x^2}{5}$ est la seule solution de l'équation qui soit définie sur *R*.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice

Retour

Solution (MATH12E02C)

L'équation est définie sur R. Elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en 0.
On considère les deux intervalles de R : $I_1 =]-\infty,0[\quad et \quad I_2 =]0,+\infty[$
On cherche des solutions sur I_j pour j prenant les valeurs 1 et 2.
Supposons dorénavant j fixé.

On peut alors exprimer l'équation sous la forme normalisée : $y' - \frac{1}{x} y = xArc\tan x$

- **Equation sans second membre** :

  La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur I_j et admet donc des primitives sur cet intervalle, en particulier : $x \mapsto ln|x|$

  La solution générale de l'équation différentielle est donc la fonction y_0 définie par : $x \mapsto Ke^{ln|x|} = K|x|$

  Soit : $y_0 = \begin{cases} \lambda_1 x \ \ sur \ \ I_1 =]-\infty,0[\\ \lambda_2 x \ \ sur \ \ I_2 =]0,+\infty[\end{cases}$

- **Solution particulière** :

  Utilisons la méthode de variation de la constante
  On pose $y = \lambda(x) \times x \quad avec \quad y' = \lambda'(x) \times x + \lambda(x)$
  On remplace dans l'équation de départ et il reste après simplification :
  $\lambda'(x) = Arc\tan x$
  On intègre par parties et on obtient :
  $\lambda(x) = \int Arc\tan x \ dx = xArc\tan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = xArc\tan x - \frac{1}{2} ln\left(1+x^2\right)$
  Soit une solution particulière définie par : $y(x) = x^2 Arc\tan x - \frac{1}{2} x \, ln\left(1+x^2\right)$

- **Solution générale de l'équation complète**

  En utilisant le principe de superposition des solutions

  $$y = f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x + x^2 Arc\tan x - \frac{1}{2} x \, ln\left(1+x^2\right) \ \ sur \ \ I_1 =]-\infty,0[\\ \lambda_2 x + x^2 Arc\tan x - \frac{1}{2} x \, ln\left(1+x^2\right) \ \ sur \ \ I_2 =]0,+\infty[\end{cases}$$

  $\lambda_1 \ et \lambda_2$ étant des réels quelconques.

Raccordement des solutions en 0

- Continuité de la fonction en 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\lambda_1 x + x^2 Arc\tan x - \frac{1}{2} x\, ln\left(1+x^2\right)\right) = 0$$

Cette limite est vraie à droite et à gauche de 0.
la solution est donc continue en 0 et $f(0)=0$

- Dérivabilité en 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\lambda_1 + xArc\tan x - \frac{1}{2} ln\left(1+x^2\right)\right) = \lambda_1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\lambda_2 + xArc\tan x - \frac{1}{2} ln\left(1+x^2\right)\right) = \lambda_2$$

On peut poser $f'(0) = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

- On vérifie que l'équation différentielle est satisfaite en 0

Conclusion, la fonction définie par $y = f(x) = \lambda x + x^2 Arc\tan x - \frac{x}{2} ln\left(1+x^2\right)$, λ étant un réel quelconque, est la seule solution de l'équation qui soit définie sur *R*.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH12E03A)

L'équation est définie sur R; elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en 0.
On considère les deux intervalles de R : $I_1 =]-\infty,0[$ *et* $I_2 =]0,+\infty[$
On cherche des solutions sur I_j pour *j* prenant les valeurs 1 et 2.
Supposons dorénavant *j* fixé.

On peut alors exprimer l'équation sous la forme normalisée : $y' + \frac{1}{x} y = \frac{e^x}{x}$

- **Equation sans second membre** :

  La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur I_j et admet donc des primitives sur cet intervalle, en particulier : $x \mapsto ln|x|$

  La solution générale de l'équation différentielle est donc la fonction y_0 définie par : $x \mapsto Ke^{-ln|x|} = \frac{K}{|x|}$

  Soit : $y_0 = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{x} \quad sur \quad I_1 =]-\infty,0[\\ \frac{\lambda_2}{x} \quad sur \quad I_2 =]0,+\infty[\end{cases}$ où λ_1 *et* λ_2 sont des réels quelconques.

- **Solution particulière** :

  Utilisons la méthode de variation de la constante

  On pose $y = \lambda(x)\frac{1}{x}$ *avec* $y' = \lambda'(x)\times\frac{1}{x} + \lambda(x)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

  On remplace dans l'équation de départ et il reste après simplification :

  $\lambda'(x) = e^x \Rightarrow \lambda(x) = e^x$

  Soit une solution particulière définie par : $y(x) = \frac{e^x}{x}$

- **Solution générale de l'équation complète**

  On obtient la solution générale de l'équation différentielle complète en utilisant le principe de superposition des solutions

  $$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{x} + \frac{e^x}{x} \quad sur \quad I_1 =]-\infty,0[\\ \frac{\lambda_2}{x} + \frac{e^x}{x} \quad sur \quad I_2 =]0,+\infty[\end{cases}$$

  λ_1 *et* λ_2 étant des réels quelconques.

Raccordement des solutions en 0

- Continuité de la fonction en 0.

  On rappelle qu'au voisinage de 0 on a : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$

  Donc on obtient : $\frac{\lambda_1}{x} + \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ qui existe si et seulement si $\lambda_1 = -1$

  De même on doit avoir $\lambda_2 = -1$

  On peut alors prolonger par continuité en posant $f(0) = 1$

- Dérivabilité en 0.

  $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{\frac{-1}{x} + \frac{e^x}{x} - 1}{x} \right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{\frac{-1}{x} + \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} + o(x) - 1}{x} \right) = \frac{1}{2}$$, on obtient évidemment la même limite à droite de 0.

  On peut poser $f'(0) = \frac{1}{2}$

- On vérifie que l'équation différentielle est alors satisfaite en 0

  $0 \times \frac{1}{2} + 1 = e^0 = 1$

Conclusion, la fonction définie par $y = f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, est la seule solution de l'équation qui soit définie sur R.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice

Retour

Solution (MATH12E03B)

On travaille donc sur l'intervalle $]0;+\infty[$ sur lequel on peut normaliser l'équation différentielle : $y' - \frac{(x+1)}{x}y = -e^x\frac{(x^2+1)}{x}$

- **Equation sans second membre** : $y' - \frac{(x+1)}{x}y = 0$

  La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et admet sur cet intervalle des primitives, en particulier $x \mapsto x + \ln x$

  La solution générale de l'équation homogène est donc : $y_0 = \lambda x e^x$

- **Solution particulière :**

  Cherchons une solution particulière de (E), en utilisant la méthode de variation de la constante.

  $y = \lambda(x)xe^x$

  $y' = \lambda'(x)xe^x + \lambda(x)e^x + \lambda(x)xe^x$

  En reportant dans l'équation, on obtient après simplification

  $\lambda'(x) = -\frac{x^2+1}{x^2} = -1 - \frac{1}{x^2}$

  En intégrant, on obtient

  $\lambda(x) = -x + \frac{1}{x}$ soit finalement $y = (-x^2+1)e^x$

- **Solution générale de l'équation complète**.

  En utilisant le principe de superposition des solutions, on obtient :

  $y = (-x^2 + \lambda x + 1)e^x$, où λ est un réel quelconque.

Question facultative : raccordement en 0.

On a $y = \begin{cases} (-x^2+\lambda_1 x+1)e^x & sur\ ]-\infty;0[\\ (-x^2+\lambda_2 x+1)e^x & sur\ ]0;+\infty[\end{cases}$ λ_1 *et* λ_2 sont des réels quelconques

- Continuité en 0

  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$

  On peut donc prolonger les solutions en 0 en posant $f(0) = 1$

- Dérivabilité en 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left((-x+\lambda_1)e^x + \frac{e^x-1}{x} \right) = \lambda_1 + 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left((-x+\lambda_2)e^x + \frac{e^x-1}{x} \right) = \lambda_2 + 1$$

le prolongement sera dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$

La fonction définie par $f(x) = \left(-x^2+1+\lambda x\right)e^x$, $\lambda \in R$, est la seule solution de l'équation différentielle définie sur R

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice

Retour

Solution (MATH12E03C)

L'équation est définie sur $\left]-1{,}1\right[$; elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en 0.

On résout cette équation sur l'intervalle $\left]0;1\right[$.

L'équation normalisée associée est : $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}}$

- **Equation sans second membre**.

La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur $\left]0;1\right[$ et admet donc des primitives sur cet l'intervalle, en particulier la fonction $x\mapsto ln\,x$. La solution générale de l'équation sans second membre est donc la fonction définie sur $\left]0;1\right[$ par : $y_0=\lambda e^{-ln\,x}=\dfrac{\lambda}{x},\ \lambda\in R$

- **Solution particulière**.

Cherchons une solution particulière de l'équation complète en utilisant la méthode de variation de la constante.

On pose $y=\dfrac{\lambda(x)}{x}$ *avec* $y'=\dfrac{\lambda'(x)x-\lambda(x)}{x^2}$

En reportant dans l'équation, il reste après simplification :

$$\lambda'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\quad soit\quad \lambda(x)=\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

En posant $X=x^2$, on obtient : $\lambda(x)=Arc\sin\left(x^2\right)$

Soit la solution particulière définie par : $y=\dfrac{Arc\sin\left(x^2\right)}{x}$

- **Solution générale.**

En utilisant le principe de superposition des solutions, on en déduit la solution f générale de l'équation différentielle proposée.

$$x\mapsto f(x)=\frac{\lambda}{x}+\frac{Arc\sin\left(x^2\right)}{x},\quad \lambda\in R$$

Question facultative :

On considère maintenant la solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $]-1;1[$. On a alors la solution générale définie par :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{x} + \dfrac{Arc\sin(x^2)}{x} & sur\ ]-1;0[\\ \dfrac{\lambda_2}{x} + \dfrac{Arc\sin(x^2)}{x} & sur\ ]0;1[\end{cases} \quad , \ \lambda_1 \in R \ et \ \ \lambda_2 \in R$$

- Continuité en 0.

  On sait que $Arc\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$

  $$f(x) = \frac{\lambda}{x} + \frac{x^2 + o(x^2)}{x} = \frac{\lambda}{x} + x + o(x)$$

  Une condition nécessaire pour obtenir une limite finie lorsque x tend vers 0 est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

  On peut donc prolonger *f* par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$

- Dérivabilité en 0.

  $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{Arc\sin(x^2)}{x^2} = 1 + o(1)$$

  On peut donc aussi prolonger la dérivée en posant $f'(0) = 1$

  On vérifie dans l'équation différentielle de départ que le point $(0;0)$ est un point d'une courbe intégrale, avec une tangente de pente 1.

Conclusion :

La fonction définie par :

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{Arc\sin(x^2)}{x} & si \quad x \in\ ]-1,1[- \{0\} \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

est l'unique solution de l'équation différentielle sur $]-1,1[$.

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH12E04A)

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation différentielle s'écrit sous la forme normalisée :

$$y' + \frac{x-1}{x} y = x$$

- **Equation sans second membre**.

  La fonction $x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et admet donc des primitives sur cet l'intervalle, en particulier la fonction $x \mapsto x - ln\, x$. La solution générale de l'équation sans second membre est donc la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $y_0 = \lambda e^{-x+ln\, x} = \lambda x e^{-x}$, $\lambda \in R$

- **Solution particulière**.

  On remarque que la fonction $x \mapsto x$ est solution évidente de l'équation complète.

- **Solution générale.**

  En utilisant le principe de superposition des solutions, on en déduit la solution *f* générale de l'équation différentielle proposée.
  $x \mapsto f(x) = \lambda x e^{-x} + x,\ \lambda \in R$

Question facultative :

Vous pourrez vérifier que sur l'intervalle $]-\infty;0[$, on obtient la solution générale suivante : $y = \lambda_1 \dfrac{e^x}{x} + x + 2 + \dfrac{2}{x}$ *où* $\lambda_1 \in R$

Et donc sur $]0;+\infty[$ $y = \lambda_2 x e^{-x} + x,\ \lambda_2 \in R$

Raccordement en 0 :

- Continuité de la fonction en 0

$$y = \lambda_1 \frac{1 + x + o(x)}{x} + x + 2 + \frac{2}{x} = \frac{2+\lambda_1}{x} + 2 + \lambda_1 + x + o(1)$$

La fonction *f* solution de l'équation différentielle sur *R* impose que la limite en 0 soit finie. Cette condition est réalisée pour $\lambda_1 = -2$ et l'on obtient alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = 0$. De plus $\forall \lambda \in R,\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} y(x) = 0$

On peut donc prolonger par continuité la fonction *f* en 0 en posant $f(0) = 0$

- Dérivabilité en 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{-2}{x^2}\left(e^x-1-x\right)+1\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{-2}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)+1\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(-\frac{x}{3}+o(x)\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\lambda_2 e^{-x}+1\right) = \lambda_2+1$$

la fonction est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_2 = -1$

Conclusion :

La seule fonction f continue en 0 et dérivable en 0, vérifiant l'équation différentielle est la fonction f définie par ::

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}\left(1-e^x\right)+x+2 & sur \ \left]-\infty;0\right[\\ 0 & si \ \ x=0 \\ x\left(1-e^{-x}\right) & sur \ \left]0;+\infty\right[\end{cases}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice

Retour

Solution (MATH12E04B)

L'équation est définie sur R; elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en 0 et en -1

On considère: $I_1 =]-\infty,-1[\quad I_2 =]-1,0[\quad et \quad I_3 =]0,+\infty[$

On cherche des solutions sur I_j pour j prenant les valeurs 1, 2 et 3.

Supposons dorénavant j fixé. On peut alors la forme normalisée de l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{x(x+1)} y = \frac{Arc\tan x}{x(x+1)}$

- **Equation sans second membre** : $y' + \frac{1}{x(x+1)} y = 0$

  La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ est continue sur I_j et admet donc sur cet intervalle des primitives, en particulier, $x \mapsto ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$

  La solution générale de l'équation homogène est donc définie par :

$$y_0 = \begin{cases} \lambda_1 \frac{x+1}{x} & sur \quad]-\infty;-1[\\ \lambda_2 \frac{x+1}{x} & sur \quad]-1;0[\\ \lambda_3 \frac{x+1}{x} & sur \quad]0;+\infty[\end{cases}$$

  Où $\lambda_1, \lambda_2 \ et \ \lambda_3$ sont des constantes réelles.

- **Solution particulière** :

  Cherchons une solution particulière de l'équation complète en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose :

$$y = \lambda(x)\frac{x+1}{x} \quad avec \quad y' = \lambda'(x)\frac{x+1}{x} + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

  En reportant dans l'équation, et après simplification, on obtient :

$$\lambda'(x) = \frac{Arc\tan x}{(x+1)^2}$$

  En intégrant par parties et en utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient

$$\lambda(x) = -\frac{Arc\tan x}{x+1} + \frac{1}{2} ln|x+1| - \frac{1}{4} ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2} Arc\tan x$$

  La solution générale est la fonction y définie sur I_j

$$y(x) = -\frac{Arc\tan x}{x} + \frac{1}{2}\left(ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + Arc\tan x\right)\frac{x+1}{x}$$

- **Solution générale :**

En utilisant le principe de superposition des solutions :

$$y(x)=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\lambda_1+ln\frac{-x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{x+1}{x}+\frac{x-1}{2x}Arc\tan x & sur \quad]-\infty;-1[\\ \frac{1}{2}\left(\lambda_2+ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{x+1}{x}+\frac{x-1}{2x}Arc\tan x & sur \quad]-1;0[\\ \frac{1}{2}\left(\lambda_3+ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{x+1}{x}+\frac{x-1}{2x}Arc\tan x & sur \quad]0;+\infty[\end{cases}$$

On cherche maintenant à raccorder les solutions en –1 et en 0

Raccordement en –1

- Continuité en –1

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=Arc\tan(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

la continuité des solutions en –1 est réalisée quelles que soient les constantes λ_1 *et* λ_2, en revanche, la solution n'est pas dérivable en –1.

Il n'existe pas de solution définie sur $]-\infty,0[$.

Raccordement en 0

- Continuité en 0 :

au voisinage de 0 on a:

$$\frac{x-1}{x}Arc\tan x=(x-1)\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)=-1+x+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$$

$$ln(x+1)-\frac{1}{2}ln\left(1+x^2\right)=x-x^2+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$$

$$ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{x+1}{x}=1-\frac{2}{3}x^2+o\left(x^2\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=0 \iff \lambda_2=\lambda_3=0$$

On peut donc prolonger les solutions en 0 en posant $f(0)=0$

- Dérivabilité en 0

  Toujours au voisinage de 0 on a:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(-1+x+\frac{x^2}{3}+1-\frac{2}{3}x^2+o\left(x^2\right)\right)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2+o\left(x^2\right)$$

  Le prolongement sera dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{2}$

Il existe donc une solution f de l'équation différentielle sur l'ensemble $]-1;+\infty[\,=I_2\cup\{0\}\cup I_3$ définie par :

$$f(x)=\frac{1}{2x}(x-1)\,Arc\tan x+(x+1)\,ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons fortement de faire l'exercice suivant (Cliquez sur Exercice).

Exercice ?

Retour

Solution (MATH12E04C)

L'équation est définie sur R; elle est linéaire et le coefficient de y' s'annule en -1, 0 et 1. On considère les intervalles :

$I_1 =]-\infty, -1[\qquad I_2 =]-1,0[\quad I_3 =]0,1[\quad et \quad I_4 =]1,+\infty[$

On cherche des solutions sur I_j pour j prenant les valeurs 1, 2,3 et 4.

Supposons dorénavant j fixé. On peut exprimer l'équation différentielle sur chacun des intervalles sous forme normalisée : $y' + \dfrac{2}{x\left(x^2-1\right)}y = \dfrac{x}{\left(x^2-1\right)}$

- **Equation sans second membre** : $y' + \dfrac{2}{x\left(x^2-1\right)}y = 0$

  La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x\left(x^2-1\right)}$ est continue sur I_j et admet donc sur chacun de ces intervalles des primitives, en particulier, $x \mapsto ln\left(\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x^2}\right)$

  La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$y = \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]-\infty;-1[\\ \lambda_2 \dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]-1;0[\\ \lambda_3 \dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]0;1[\\ \lambda_4 \dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]1;+\infty[\end{cases}$$

- **Solution particulière de l'équation complète.**

  Cherchons une solution particulière de (E), en utilisant la méthode de variation de la constante

$$y = \lambda(x)\frac{x^2}{x^2-1} \quad avec \quad y' = \lambda'(x)\frac{x^2}{x^2-1} - \lambda(x)\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

  En reportant dans l'équation initiale et en simplifiant, on obtient :

  $\lambda'(x) = \dfrac{1}{x}$ soit : $\lambda(x) = ln|x|$

  On obtient donc comme solution particulière la fonction définie par :

$$y(x) = \frac{x^2}{x^2-1} ln|x|$$

- **Solution générale.**

En utilisant le principe de superposition des solutions

$$y=\begin{cases}\left(ln(-x)+\lambda_1\right)\dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]-\infty;-1[\\ \left(ln(-x)+\lambda_2\right)\dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]-1;0[\\ \left(ln\, x+\lambda_3\right)\dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]0;1[\\ \left(ln\, x+\lambda_4\right)\dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]1;+\infty[\end{cases} \qquad (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in R^4$$

Raccordement en –1

- Continuité en –1.

f est continue en –1 si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2=0$. On pose alors : $f(-1)=\dfrac{1}{2}$

- Dérivabilité en –1

On effectue le développement limité au voisinage de –1 de la fonction :

$$\frac{f(x)-\dfrac{1}{2}}{x+1}=\frac{ln(-x)\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{1}{2}}{x+1}=\frac{ln(1-X)\dfrac{(X-1)^2}{(X-1)^2-1}-\dfrac{1}{2}}{X}$$

$$=\frac{\left(-X-\dfrac{X^2}{2}+o\left(X^2\right)\right)\dfrac{(X-1)^2}{X(X-2)}-\dfrac{1}{2}}{X}=\frac{1}{2}+o(X)$$

On peut donc poser $f'(-1)=\dfrac{1}{2}$

Il y a donc raccordement en –1.

Raccordement en 0

On pose $f(0)=0 \quad et \quad f'(0)=0$ qui assurent le prolongement de *f* par continuité en 0 et la dérivabilité de *f* en 0.
Il y a donc raccordement en 0.

Raccordement en 1

f est continue en 1 si et seulement si $\lambda_3=\lambda_4=0$, on pose alors $f(1)=\dfrac{1}{2}$

Pour la dérivabilité on a : $f'(1)=\dfrac{1}{2}$

Il existe une solution unique sur R donnée par :

$$y=\begin{cases} ln(-x)\dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]-\infty;-1[\\ \dfrac{1}{2} & si \quad x=-1 \\ ln(-x)\dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]-1;0[\\ 0 & si \quad x=0 \\ ln\, x\dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]0;1[\\ \dfrac{1}{2} & si \quad x=1 \\ ln\, x\dfrac{x^2}{x^2-1} & sur \quad]1;+\infty[\end{cases}$$

avec $f'(-1)=f(1)=\dfrac{1}{2} \qquad f'(0)=0$

Si vous avez éprouvé des difficultés à résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de contacter votre tuteur.

Retour

Aide (MATH12E01A)

Le facteur de y' ne s'annulant pas l'équation est sous forme normalisée. Il existe donc une fonction solution Y et une seule de l'équation et telle que $Y(1) = f(1) = 1$

On rappelle qu'une primitive de la fonction $f\,;\; x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est $ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

($x \mapsto Argsh\, x$ serait maladroit dans cet exercice)

Retour

Aide (MATH12E01B)

Le facteur de y' ne s'annulant pas l'équation est sous forme normalisée. Il existe donc une fonction solution Y et une seule de l'équation et telle que $Y(0) = f(0) = 1$

Il existe une solution polynomiale de degré 1 pour l'équation complète

Retour

Aide (MATH12E01C)

Le facteur de y' ne s'annulant pas l'équation est sous forme normalisée. Il existe donc une fonction solution Y et une seule de l'équation et telle que $Y(0) = f(0) = 2$

La fonction $f : x \mapsto \ln x$ *est une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $]-\infty,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} \ln a = \ln b \\ a > 0 \ \ et \ \ b > 0 \end{array}\right| \Rightarrow a = b$$

Retour

Aide (MATH12E02A)

Le facteur de y' s'annule pour $x=0$, il faut donc résoudre cette équation différentielle sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$.

On essaiera de « raccorder » les deux solutions trouvées sur chaque intervalle.

Il faut donc vérifier la continuité de la solution en $x=0$ et la dérivabilité en $x=0$.

Soit :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = l$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = l'$$

Et enfin $a(x_0)l' + b(x_0)l = c(x_0)$

La solution étant de classe C^n, les développements limités fournissent aussi la réponse

Retour

Aide (MATH12E02B)

Le facteur de y' s'annule pour $x=0$, il faut donc résoudre cette équation différentielle sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$.

On essaiera de « raccorder » les deux solutions trouvées sur chaque intervalle.

Il faut donc vérifier la continuité de la solution en $x=0$ et la dérivabilité en $x=0$.

Soit :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = l$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = l'$$

Et enfin $a(x_0)l' + b(x_0)l = c(x_0)$

Pour obtenir une limite finie en $x=0$, vous devez éliminer les termes contenant des puissances négatives de *x*.

Retour

Aide (MATH12E02C)

Une primitive de $x \mapsto Arc\tan x$ s'obtient en intégrant par parties

Retour

Aide (MATH12E03A)

Le facteur de y' s'annule pour $x = 0$, il faut donc résoudre cette équation différentielle sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$.

On essaiera de « raccorder » les deux solutions trouvées sur chaque intervalle.

Il faut donc vérifier la continuité de la solution en $x = 0$ et la dérivabilité en $x = 0$.

Soit :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = l$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = l'$$

Et enfin $a(x_0)l' + b(x_0)l = c(x_0)$

Le raccordement des solutions en $x = 0$ s'effectuera en utilisant le développement limité de e^x à un ordre correct

Retour

Aide (MATH10 E 03B)

Le facteur de y' s'annule pour $x=0$, il faut donc résoudre cette équation différentielle sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$.

On essaiera de « raccorder » les deux solutions trouvées sur chaque intervalle.

Il faut donc vérifier la continuité de la solution en $x=0$ et la dérivabilité en $x=0$.

Soit :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = l$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = l'$$

Et enfin $a(x_0)l' + b(x_0)l = c(x_0)$

Retour

Aide (MATH12E03C)

Le facteur de y' s'annule pour $x=0$, il faut donc résoudre cette équation différentielle sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$.

On essaiera de « raccorder » les deux solutions trouvées sur chaque intervalle.

Il faut donc vérifier la continuité de la solution en $x=0$ et la dérivabilité en $x=0$.

Soit :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)=l$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=l'$$

Et enfin $a(x_0)l'+b(x_0)l=c(x_0)$

Le raccordement des solutions en $x=0$ s'effectuera en utilisant le développement limité de $x\mapsto Arc\sin x$ à un ordre correct

Retour

Aide (MATH12E04A)

Le facteur de y' s'annule pour $x = 0$, il faut donc résoudre cette équation différentielle sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$.

On essaiera de « raccorder » les deux solutions trouvées sur chaque intervalle.

Il faut donc vérifier la continuité de la solution en $x = 0$ et la dérivabilité en $x = 0$.

Soit :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = l$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = l'$$

Et enfin $a(x_0)l' + b(x_0)l = c(x_0)$

Retour

Aide (MATH12E04B)

Le facteur de y' s'annule pour $x=0$ et $x=-1$, il faut donc résoudre cette équation différentielle sur les intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ *et* $]0;+\infty[$.

On essaiera de « raccorder » les solutions trouvées sur chaque intervalle. Il faut donc vérifier la continuité de la solution en $x=x_0$ et la dérivabilité en $x=x_0$ pour $x_0=0$ *puis* $x_0=-1$.

Soit :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)=l$$

et

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=l'$$

Et enfin $a(x_0)l'+b(x_0)l=c(x_0)$

On cherche des solutions sur l'intervalle le plus grand possible

L'intégration par parties est utile pour trouver une solution particulière de l'équation complète

Retour

Aide (MATH12E04C)

Il faut considérer les intervalles :

$I_1 =]-\infty, -1[\qquad I_2 =]-1, 0[\quad I_3 =]0, 1[\quad et \quad I_4 =]1, +\infty[$

Le raccordement doit être envisagé aux points –1, 0 et 1

Retour