3. FONCTIONS NUMERIQUES. DERIVEES, DIFFERENTIELLES.

1. Rappel.

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$, on note $\overset{o}{I}$ l'intérieur de I

$$\overset{o}{I} = \left\{ x \in I \,\middle|\, \exists \alpha > 0 \text{ avec }]x-\alpha, x+\alpha[\subset I \right\}$$

Soit $f \in F(I, \mathbb{R}), x_0 \in \overset{o}{I}$

2. Dérivée et différentielle.

2.1. Dérivée en un point.

Définition

On dit que f est dérivable en x_0 de dérivée L en x_0 si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet pour limite L quand x tend vers x_0.

<u>Notation</u> : $L = f'(x_0)$ ou $L = \dfrac{df}{dx}(x_0)$.

On a donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$

<u>Important</u> : $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

En posant $x = x_0 + h$, on a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

Remarque

Il résulte de l'unicité de la limite que si la dérivée de f existe en x_0, elle est unique.

2.2. Dérivée à droite, dérivée à gauche.

On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0] \subset I$ (resp. $[x_0, x_0 + \alpha[\subset I$)

On dit que f est <u>dérivable à gauche</u> (resp. à droite) en x_0 si et seulement si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite quand x tend vers x_0, $x < x_0$ (resp. $x > x_0$)

Si f est dérivable à gauche en x_0, on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$.

Si f est dérivable à droite en x_0, on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$.

Ou encore

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad\qquad f'_d(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $x_0 \in \overset{o}{I}$,

alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f dérivable en x_0, de dérivée $f'(x_0)$;

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à gauche de } x_0 \text{ de dérivée } f'_g(x_0) \\ f \text{ dérivable à droite de } x_0 \text{ de dérivée } f'_d(x_0) \\ f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0) \end{cases}.$$

Propriétés

Si f est dérivable en x_0, alors sa courbe représentative Γ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ admet une tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ qui est la droite passant par M_0 de coefficient directeur $f'(x_0)$ et donc d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Remarque

Si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en x_0 alors sa courbe représentative admet une demi-tangente à gauche (resp. à droite) au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

3. Fonction différentiable en un point.

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{o}{I}$ intérieur de I, $f \in F(I,\mathbb{R})$.

On dit que f est différentiable en x_0, si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : h \mapsto \varepsilon(h)$ définie dans un voisinage de 0, et un réel a (indépendant de h) tel que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

On dit aussi que f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f \in F(I,\mathbb{R})$)

f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0

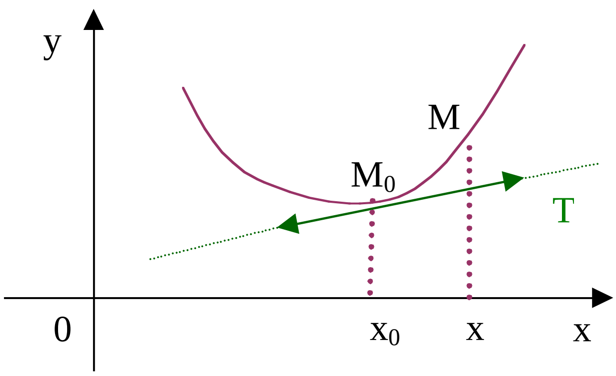
Définition

Si f est différentiable en $x_0 \in \overset{o}{I}$, l'application linéaire $h \mapsto f'(x_0)h$ se nomme différentielle de f en x_0. On la note df_{x_0}

On note aussi $df_{x_0}(h) = dy$ et en remplaçant h par dx

$df_{x_0}(dx) = dy$ ou encore $dy = f'(x_0)dx$ et $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$

<u>Interprétation géométrique</u>



3.1. Continuité des applications différentiables.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{o}{I}$, $f \in F(I,\mathbb{R})$.

Si f est différentiable (dérivable) en x_0, alors f est continue en x_0.

La réciproque est fausse.

4. Calcul des dérivées.

4.1. Dérivée sur un intervalle.

<u>Définition</u>

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in F(I,\mathbb{R})$. On dit (par exemple) que f est dérivable sur $[a,b[$ si et seulement si f est dérivable en tout point de $]a,b[$ et f est dérivable à droite de a.

Si f est dérivable sur I, on définit une nouvelle fonction

$$\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

f' s'appelle fonction dérivée de f sur I.

<u>Notation</u>

On note $D(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I

$$D(I,\mathbb{R}) \subset C(I,\mathbb{R}) \subset F(I,\mathbb{R})$$

4.2. Opérations sur les fonctions dérivables.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, dérivables en x_0, alors :

- $f + g$ est dérivable en x_0, et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$,
- $f\,g$ est dérivable en x_0, et $(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$,
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

4.3. Dérivée d'une fonction composée.

Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $y_0 = f(x_0)$ alors gof est dérivable en x_0 et

$$(gof)'(x_0) = g'(f(x_0)f'(x_0)$$

ou en utilisant la différentielle $d(gof)_{x_0} = (dg)_{f(x_0)} o df_{(x_0)}$.

4.4. Dérivée des fonctions réciproques.

Théorème

Si f est une fonction continue, strictement monotone de l'intervalle I sur $J = f(I)$ alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J.

Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ ou encore $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f' o f^{-1}(y_0)}$.

Théorème

Soit f un homéomorphisme différentiable sur I, alors f est un difféomorphisme si $f'(x)$ ne s'annule pas sur I.

4.5. Dérivées des fonctions circulaires réciproques.

Théorème

$\mathrm{Arc}\sin$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$ $(\mathrm{Arc}\sin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\mathrm{Arc}\cos$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$ $(\mathrm{Arc}\cos)'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\mathrm{Arc}\tan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $(\mathrm{Arc}\tan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

5. Dérivées successives.

Définition

Soit I un intervalle de R, $f \in F(I,\mathbb{R})$.

Si on suppose que f est dérivable sur I, et que f' est elle-même dérivable sur I, alors on peut définir $(f')'$ sur I, $(f')'$ est la fonction dérivée seconde de f et se note f''.

On définit par récurrence, $f^{(p)}$ pour $p \in$ C 276Tϕ}44.70672646.819∗Tω}(I)Tφ}/TT10 1 Tϕ}12 0 08ι }192.8

Exercice MATH03E01

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle que l'on précisera. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice MATH03E02

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

Etudier les variations de la fonction f.

Montrer que cette fonction admet une fonction réciproque f^{-1}.

Expliciter la fonction f^{-1}.

Exercice MATH03E03

Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $x^{10} + x^5 = 1056$

Exercice MATH03E04

Calculer la dérivée n$^{\text{ième}}$ de $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$

Exercice MATH03E05

Calculer la dérivée n$^{\text{ième}}$ de $f(x) = x^2 \cos x$

Exercice MATH03E06

Calculer la dérivée n$^{\text{ième}}$ de $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$

Exercice MATH03E07*

Calculer la dérivée n$^{\text{ième}}$ de $f(x) = e^x \cos x$

Exercice MATH03E08**

Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x) = x^n(1+x)^n$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$ $(n \in \mathbb{N})$

Exercice MATH03E09

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

Cette fonction peut-elle être de classe C^3 sur $\mathbb{R}$?

Exercice MATH03E10

Déterminer la classe sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \quad x \sin\frac{1}{x} \quad \text{si } x$$

Exercice **MATH03E12**

Déterminer la classe sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

Solution MATH03E01

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues.

f est impaire, on limite l'étude des variations à $\mathbb{R}_+$

pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ et $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est impaire, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$, déterminons la bijection réciproque :

$$\frac{x}{1+|x|} = y \quad \Rightarrow x \text{ et } y \text{ sont de même signe}$$

Si $x \geq 0$ alors $\dfrac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = (1+x)y \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1-y}$

Si $x < 0$ alors $\dfrac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = (1-x)y \Leftrightarrow x(1+y) = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1+y}$

La bijection réciproque f^{-1} est donc l'application

$$\begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \dfrac{x}{1-|x|} \end{cases}$$

Retour

Solution **MATH03E02**

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Si $x \in]-\infty, 0[$ alors f est continue et strictement décroissante et $f(]-\infty, 0[) =]-\infty, 0[$

Si $x \in]0, +\infty[$ alors f est continue et strictement décroissante et $f(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$

f est une bijection de $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

Déterminons la bijection réciproque :

puisque $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ alors

$$y = \frac{e^x}{e^x - 1} \Leftrightarrow y(e^x - 1) = e^x \Leftrightarrow e^x(y-1) = y \Leftrightarrow e^x = \frac{y}{y-1} > 0 \Leftrightarrow x = \ln\frac{y}{y-1}.$$

La bijection réciproque f^{-1} est donc l'application

$$\begin{cases}]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\\ \qquad x \mapsto \ln\dfrac{x}{x-1} \end{cases}$$

Retour

Solution **MATH03E03**

Soit f l'application $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^{10} + x^5$$

f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$

f prend une fois et une seule la valeur 1056 et puisque

$$f(2) = 2^{10} + 2^5 = 1024 + 32 = 1056$$

L'équation admet une solution et une seule x=2

Remarque

On peut aussi envisager de poser $X = x^5$, l'équation proposée s'écrit alors :

$X^2 + X = 1056$ ce qui implique $X_1 = -33$ et $X_2 = 32$ et donc $x_1 = -\sqrt[5]{33}$ et $x_2 = 2$,

et l'on retrouve l'unique solution x=2 sur $\mathbb{R}^+$.

Retour

Solution **MATH03E04**

On utilise la formule de Leibniz donnant la dérivée n$^{\text{ième}}$ d'un produit

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$u(x) = e^x \quad \Rightarrow u^{(p)}(x) = e^x$$

$$v(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow v'(x) = 2ax + b \Rightarrow v''(x) = 2a \Rightarrow v^{(k)}(x) = 0 \ \forall k \geq 3$$

La formule de Leibniz ne comporte que 3 termes pour un polynôme du second degré (propriété de nilpotence)

$$f^{(n)}(x) = e^x \left[(ax^2 + bx + c) + n(2ax + b) + \frac{n(n-1)}{2} 2a \right]$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \left[ax^2 + x(b + 2an) + c + nb + n(n-1)a \right]$$

Retour

Solution MATH03E05

On utilise la formule de Leibniz donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

On pose

$$u = \cos x$$

$$v = x^2 \text{ et donc } v' = 2x \quad v'' = 2 \quad v^{(k)} = 0 \quad \forall k \geq 3$$

La formule de Leibniz ne comporte que 3 termes pour un polynôme du second degré (propriété de nilpotence)

et $u^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ $\qquad u^{(n-1)} = \cos\left[x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right] = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ puisque $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$

$$u^{(n-2)} = \cos\left[x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right] = -\cos(x + \frac{n\pi}{2}) \text{ puisque } \cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$$

$$f^{(n)}(x) = \left[x^2 \cos x\right]^{(n)} = x^2 \cos(x + \frac{n\pi}{2}) + 2nx\sin(x + \frac{n\pi}{2}) - 2\frac{n(n-1)}{2}\cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$f^{(n)}(x) = \left[x^2 \cos x\right]^{(n)} = (x^2 - n^2 + n)\cos(x + \frac{n\pi}{2}) + 2nx\sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

Les coefficients du triangle de Pascal étant symétriques, on obtiendrait le même résultat en posant $u = x^2$ et $v = \cos x$, les seuls termes non nuls dans la formule de Leibniz étant cette fois les trois derniers termes.

Retour

Solution MATH03E06

Rappel

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \quad \text{et} \quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

Linéarisons

$$\cos^3 x = (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^3 = \frac{1}{8}\left[(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})\right] = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

$$\sin^3 x = (\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^3 = -\frac{1}{8i}\left[(e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right] = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}[(\cos 3x - \sin 3x) + 3(\cos x + \sin x)]$$

or $\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} + 3x)$ et $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + x)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\cos(\frac{\pi}{4} + 3x) + 3\sin(\frac{\pi}{4} + x)\right]$$

et

$$f^{(n)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[3^n \cos(\frac{\pi}{4} + 3x + \frac{n\pi}{2}) + 3\sin(\frac{\pi}{4} + 3x + \frac{n\pi}{2})\right]$$

Retour

Solution MATH03E07

Rappel

Formule d'Euler : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$f(x) = e^x \cos x = e^x$ Partie réelle (e^{ix}) = Partie réelle $(e^{(1+i)x})$

$f^{(n)}(x)$ = Partie réelle $\left\{(1+i)^n e^{(1+i)x}\right\}$

puisque $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}$

$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x$ Partie réelle $\left\{ e^{i(x+n\frac{\pi}{4})} \right\} = (\sqrt{2})^n e^x \cos(x + \frac{n\pi}{4})$

Retour

Solution MATH03E08

On utilise la formule de Leibniz donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(n-k)} v^{(k)}$$

Pour $0 \le k \le n$ posons $u = (1+x)^n$ alors $u^{(n-k)} = \dfrac{n!}{k!}(1+x)^k$

et $v = x^n$ alors $v^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

$$f^{(n)}(x) = \left[x^n (1+x)^n\right]^{(n)} = n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 x^{n-k} (1+x)^k$$

Dans cette expression polynômiale, $n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$ est le coefficient du terme en x^n

Le coefficient du terme en x^n peut se calculer directement, en effet

$$x^n (1+x)^n = (x+x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^{n-k} (x^2)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^{k+n}$$

et la dérivée $n^{\text{ième}}$ s'exprime par $x^n(1+x)^n$

Solution MATH03E09

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction f est de classe C^∞ sur R^*.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases},\ f''(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2a & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ et } f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ si } n \geq 3.$$

- Continuité de f en 0.

  $f(0) = c$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = 1.$

  Donc, f est continue en $0 \Leftrightarrow c = 1$.

- Dérivabilité de f en 0.

  $f'_d(0) = b$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f'(x) = f'_g(0) = 1.$

  Donc f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow f'_d(0) = f'_g(0) \Leftrightarrow b = 1$.

- Continuité de f' en 0.

  f' est continue en 0 car $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f'(x) = 1 = f'(0)$

- Dérivabilité de f' en 0.

  $f''_d(0) = 2a$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f''(x) = f''_g(0) = 1.$

  Donc f' est dérivable $\Leftrightarrow f''_d(0) = f''_g(0) \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

- Continuité de f'' en 0.

  f'' est continue en 0 car $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f''(x) = 1 = f''(0)$.

Donc la fonction $f : R \to R$ définie par :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est de classe C^2 sur R.

- Dérivabilité de f''.

  $f_d'''(0) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'''(x) = 1 = f_g'''(0)$

  donc f'' n'est pas dérivable en 0 car $f_d'''(0) \neq f_g'''(0)$ et, par suite, la fonction f n'est pas de classe C^3 sur R.

Retour

Solution **MATH03E10**

- f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}-\{0\}$
- Continuité en $x_0 = 0$

Pour $x \neq 0$ $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$ quand $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

f est continue en $x_0 = 0$

- Dérivabilité sur $\mathbb{R}-\{0\}$

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

- Dérivabilité en $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} \text{ n'existe pas}$$

f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$

- Conclusion

f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$

Retour

Solution **MATH03E11**

- f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{0\}$
- Continuité en $x_0 = 0$

Pour $x \neq 0$ $\left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \to 0$ quand $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

f est continue en $x_0 = 0$

- Dérivabilité sur $\mathbb{R} - \{0\}$

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

- Dérivabilité en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$$

f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 0$

- Continuité de la dérivée en 0

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) \text{ n'existe pas}$$

- Conclusion

f est seulement continue sur $\mathbb{R}$, la dérivée n'est pas continue en $x_0 = 0$,

donc f est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$

Retour

Solution MATH03E12

- f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R} - \{0\}$
- Continuité en $x_0 = 0$

Pour $x \neq 0$ $\left| x^3 \sin\frac{1}{x} \right| \leq \left| x^3 \right| \to 0$ quand $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

f est continue en $x_0 = 0$

- Dérivabilité sur $\mathbb{R} - \{0\}$

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité

$$f'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$$

- Dérivabilité en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} (x^2 \sin\frac{1}{x}) = 0$$

f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 0$

- Continuité de la dérivée en 0

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}) = 0 = f'(0)$$

- Conclusion

f est continue sur $\mathbb{R}$, la dérivée est continue en $x_0 = 0$,

donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sans être de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

- Continuité en $x_0 = 0$

Retour

Exercice

MATH03S01.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^x + 1)$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$

Déterminer sa bijection réciproque

Exercice

MATH03S02.

Déterminer la classe sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$