

## 3. FONCTIONS NUMÉRIQUES. DÉRIVÉES, DIFFÉRENTIELLES.

### 1. Rappel.

---

Soit  $I$  un intervalle non vide et non réduit à un point de  $\mathbb{R}$ , on note  $\overset{\circ}{I}$  l'intérieur de  $I$

$$\overset{\circ}{I} = \{x \in I \mid \exists \alpha > 0 \text{ avec } ]x - \alpha, x + \alpha[ \subset I\}$$

Soit  $f \in F(I, \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$

### 2. Dérivée et différentielle.

---

#### 2.1. Dérivée en un point.

##### Définition

On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  de dérivée  $L$  en  $x_0$  si et seulement si  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet

pour limite  $L$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ .

Notation :  $L = f'(x_0)$  ou  $L = \frac{df}{dx}(x_0)$ .

On a donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$

Important :  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ .

En posant  $x = x_0 + h$ , on a  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ .

##### Remarque

Il résulte de l'unicité de la limite que si la dérivée de  $f$  existe en  $x_0$ , elle est unique.

## 2.2. Dérivée à droite, dérivée à gauche.

On suppose qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $]x_0 - \alpha, x_0] \subset I$  (resp.  $[x_0, x_0 + \alpha[ \subset I$ )

On dit que  $f$  est dérivable à gauche (resp. à droite) en  $x_0$  si et seulement si  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

admet une limite quand  $x$  tend vers  $x_0$ ,  $x < x_0$  (resp.  $x > x_0$ )

Si  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$ , on note  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$ .

Si  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$ , on note  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$ .

Ou encore

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad f'_d(x_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

### Théorème

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ ,  $x_0 \in I$ ,

alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f$  dérivable en  $x_0$ , de dérivée  $f'(x_0)$  ;
- (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à gauche de } x_0 \text{ de dérivée } f'_g(x_0) \\ f \text{ dérivable à droite de } x_0 \text{ de dérivée } f'_d(x_0) \\ f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$

### Propriétés

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors sa courbe représentative  $\Gamma$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  admet une tangente en  $M_0(x_0, f(x_0))$  qui est la droite passant par  $M_0$  de coefficient directeur  $f'(x_0)$  et donc d'équation  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

### Remarque

Si  $f$  est dérivable à gauche (resp. à droite) en  $x_0$  alors sa courbe représentative admet une demi-tangente à gauche (resp. à droite) au point  $M_0(x_0, f(x_0))$ .

### 3. Fonction différentiable en un point.

#### abc Définition

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$  intérieur de  $I$ ,  $f \in F(I, \mathbb{R})$ .

On dit que  $f$  est différentiable en  $x_0$ , si et seulement si il existe une fonction  $\varepsilon : h \mapsto \varepsilon(h)$  définie dans un voisinage de 0, et un réel  $a$  (indépendant de  $h$ ) tel que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

On dit aussi que  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en  $x_0$

#### Théorème

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f \in F(I, \mathbb{R})$

$f$  est différentiable en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $x_0$

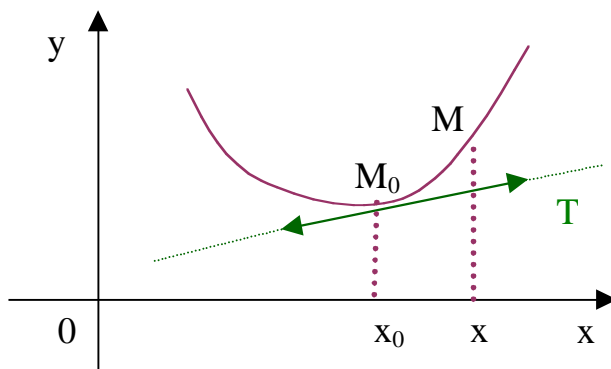
#### abc Définition

Si  $f$  est différentiable en  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ , l'application linéaire  $h \mapsto f'(x_0)h$  se nomme différentielle de  $f$  en  $x_0$ . On la note  $df_{x_0}$

On note aussi  $df_{x_0}(h) = dy$  et en remplaçant  $h$  par  $dx$

$$df_{x_0}(dx) = dy \text{ ou encore } dy = f'(x_0)dx \text{ et } f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

#### Interprétation géométrique



### 3.1. Continuité des applications différentiables.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f \in F(I, \mathbb{R})$ .

Si  $f$  est différentiable (dérivable) en  $x_0$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

La réciproque est fausse.

## 4. Calcul des dérivées.

---

### 4.1. Dérivée sur un intervalle.

#### Définition

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f \in F(I, \mathbb{R})$ . On dit (par exemple) que  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$  si et seulement si  $f$  est dérivable en tout point de  $]a, b[$  et  $f$  est dérivable à droite de  $a$ .

Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , on définit une nouvelle fonction

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

$f'$  s'appelle fonction dérivée de  $f$  sur  $I$ .

#### Notation

On note  $D(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$

$$D(I, \mathbb{R}) \subset C(I, \mathbb{R}) \subset F(I, \mathbb{R})$$

### 4.2. Opérations sur les fonctions dérivables.

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ , dérivables en  $x_0$ , alors :

- $f + g$  est dérivable en  $x_0$ , et  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  est dérivable en  $x_0$  et  $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ ,
- $f g$  est dérivable en  $x_0$ , et  $(f g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ,
- Si  $g(x_0) \neq 0$ , alors la fonction  $\frac{1}{g}$  est dérivable en  $x_0$  et  $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ ,
- Si  $g(x_0) \neq 0$ , alors la fonction  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $x_0$  et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

### 4.3. Dérivée d'une fonction composée.

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

ou en utilisant la différentielle  $d(g \circ f)_{x_0} = (dg)_{f(x_0)} \circ df_{x_0}$ .

### 4.4. Dérivée des fonctions réciproques.

#### Théorème

Si  $f$  est une fonction continue, strictement monotone de l'intervalle  $I$  sur  $J = f(I)$  alors  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J$ .

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et si  $f'(x_0) \neq 0$  alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$  et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ ou encore } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}.$$

#### Théorème

Soit  $f$  un homéomorphisme différentiable sur  $I$ , alors  $f$  est un difféomorphisme si  $f'(x)$  ne s'annule pas sur  $I$ .

### 4.5. Dérivées des fonctions circulaires réciproques.

#### Théorème

Arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$  et  $\forall x \in ] -1, 1[$   $(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Arcos est dérivable sur  $] -1, 1[$  et  $\forall x \in ] -1, 1[$   $(\text{Arcos})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Arctan est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$   $(\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

## 5. Dérivées successives.

---

### Définition

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f \in F(I, \mathbb{R})$ .

Si on suppose que  $f$  est dérivable sur  $I$ , et que  $f'$  est elle-même dérivable sur  $I$ , alors on peut définir  $(f')'$  sur  $I$ ,  $(f')'$  est la fonction dérivée seconde de  $f$  et se note  $f''$ .

On définit par récurrence,  $f^{(p)}$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$  par  $f^{(p)} = (f^{(p-1)})'$ .

Par convention,  $f^{(0)} = f$ .

## 6. Fonctions de classe $C^p$ et de classe $C^\infty$ .

---

On dit qu'une fonction  $f$  est de classe  $C^p$  sur  $I$ , on note  $f \in C^p(I, \mathbb{R})$ , si  $f$  est une fonction  $p$ -fois dérivable sur  $I$  et si  $f^{(p)}$  est continue sur  $I$ .

On dit que  $f$  est indéfiniment dérivable, ou de classe  $C^\infty$  si  $f$  admet des dérivées successives de tout ordre.

## 7. Formule de Leibniz.

---

*(Allemand 1646-1716)*

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^n$  sur  $I$  alors

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \text{ avec la convention } f^{(0)} = f \text{ et } g^{(0)} = g.$$

 Exercice   **MATH03E01** 

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ . Démontrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans un intervalle que l'on précisera. Déterminer sa bijection réciproque.

 Exercice   **MATH03E02**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ .

Etudier les variations de la fonction  $f$ .

Montrer que cette fonction admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .

Expliciter la fonction  $f^{-1}$ .

 Exercice   **MATH03E03**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^+$  l'équation  $x^{10} + x^5 = 1056$

 Exercice   **MATH03E04**

Calculer la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$

 Exercice   **MATH03E05**

Calculer la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f(x) = x^2 \cos x$

 Exercice   **MATH03E06**

Calculer la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$

 Exercice   **MATH03E07\***

Calculer la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f(x) = e^x \cos x$

 Exercice   **MATH03E08\*\***

Calculer la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f(x) = x^n(1+x)^n$ .

En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

 Exercice   **MATH03E09**

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer les réels  $a, b, c$  pour que la fonction soit de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$

Cette fonction peut-elle être de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$  ?

 Exercice   **MATH03E10**

Déterminer la classe sur  $\mathbb{R}$  de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

 Exercice   **MATH03E11**

Déterminer la classe sur  $\mathbb{R}$  de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



**x=** Exercice   **MATH03E12**

Déterminer la classe sur  $\mathbb{R}$  de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

## Solution MATH03E01

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , continue sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions continues.

$f$  est impaire, on limite l'étude des variations à  $\mathbb{R}_+$

$$\text{pour } x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

$f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme elle est impaire, elle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ,  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$ , déterminons la bijection réciproque :

$$\frac{x}{1+|x|} = y \quad \Rightarrow \quad x \text{ et } y \text{ sont de même signe}$$

$$\text{Si } x \geq 0 \quad \text{alors} \quad \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = (1+x)y \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

$$\text{Si } x < 0 \quad \text{alors} \quad \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = (1-x)y \Leftrightarrow x(1+y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

La bijection réciproque  $f^{-1}$  est donc l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1-|x|} \end{array} \right.$$

 Retour

## Solution MATH03E02

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ , dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ ,

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Si  $x \in ]-\infty, 0[$  alors  $f$  est continue et strictement décroissante et  $f(]-\infty, 0[) = ]-\infty, 0[$

Si  $x \in ]0, +\infty[$  alors  $f$  est continue et strictement décroissante et  $f(]0, +\infty[) = ]1, +\infty[$

$f$  est une bijection de  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  sur  $]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$

Déterminons la bijection réciproque :

puisque  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $y \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$  alors

$$y = \frac{e^x}{e^x - 1} \Leftrightarrow y(e^x - 1) = e^x \Leftrightarrow e^x(y - 1) = y \Leftrightarrow e^x = \frac{y}{y - 1} > 0 \Leftrightarrow x = \ln \frac{y}{y - 1}.$$

La bijection réciproque  $f^{-1}$  est donc l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ \rightarrow ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[ \\ x \mapsto \ln \frac{x}{x - 1} \end{array} \right.$$

 Retour

 **Solution MATH03E03**

Soit  $f$  l'application  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^{10} + x^5$$

$f$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

$f$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $]0, +\infty[$

$f$  prend une fois et une seule la valeur 1056 et puisque

$$f(2) = 2^{10} + 2^5 = 1024 + 32 = 1056$$

L'équation admet une solution et une seule  $x=2$

 **Remarque**

On peut aussi envisager de poser  $X = x^5$ , l'équation proposée s'écrit alors :

$X^2 + X = 1056$  ce qui implique  $X_1 = -33$  et  $X_2 = 32$  et donc  $x_1 = -\sqrt[5]{33}$  et  $x_2 = 2$ ,

et l'on retrouve l'unique solution  $x=2$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

 **Retour**

 **Solution MATH03E04**

On utilise la formule de Leibniz donnant la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'un produit

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$u(x) = e^x \Rightarrow u^{(p)}(x) = e^x$$

$$v(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow v'(x) = 2ax + b \Rightarrow v''(x) = 2a \Rightarrow v^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 3$$

La formule de Leibniz ne comporte que 3 termes pour un polynôme du second degré (propriété de nilpotence)

$$f^{(n)}(x) = e^x \left[ (ax^2 + bx + c) + n(2ax + b) + \frac{n(n-1)}{2} 2a \right]$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \left[ ax^2 + x(b + 2an) + c + nb + n(n-1)a \right]$$

 **Retour**

## Solution MATH03E05

On utilise la formule de Leibniz donnant la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'un produit

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

On pose

$$u = \cos x$$

$$v = x^2 \text{ et donc } v' = 2x \quad v'' = 2 \quad v^{(k)} = 0 \quad \forall k \geq 3$$

La formule de Leibniz ne comporte que 3 termes pour un polynôme du second degré (propriété de nilpotence)

$$\text{et } u^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad u^{(n-1)} = \cos\left[x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right] = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ puisque } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$$

$$u^{(n-2)} = \cos\left[x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right] = -\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ puisque } \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$$

$$f^{(n)}(x) = \left[x^2 \cos x\right]^{(n)} = x^2 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2 \frac{n(n-1)}{2} \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}(x) = \left[x^2 \cos x\right]^{(n)} = (x^2 - n^2 + n) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Les coefficients du triangle de Pascal étant symétriques, on obtiendrait le même résultat en posant  $u = x^2$  et  $v = \cos x$ , les seuls termes non nuls dans la formule de Leibniz étant cette fois les trois derniers termes.

 Retour

## Solution MATH03E06

### Rappel

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Linéarisons

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \left[ (e^{3ix} + e^{-3ix}) + 3(e^{ix} + e^{-ix}) \right] = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x)$$

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i} \left[ (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix}) \right] = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x)$$

$$f(x) = \frac{1}{4} [(3 \cos 3x - \sin 3x) + 3(\cos x + \sin x)]$$

or  $\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$  et  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \right]$$

et

$$f^{(n)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ 3^n \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x + \frac{n\pi}{2}\right) \right]$$

 Retour

 **Solution** MATH03E07 **Rappel**

Formule d'Euler :  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$f(x) = e^x \cos x = e^x \text{ Partie réelle } (e^{ix}) = \text{Partie réelle } (e^{(1+i)x})$$

$$f^{(n)}(x) = \text{Partie réelle } \left\{ (1+i)^n e^{(1+i)x} \right\}$$

$$\text{puisque } (1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}$$

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \text{Partie réelle } \left\{ e^{i(x+n\frac{\pi}{4})} \right\} = (\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

 **Retour**



## Solution MATH03E08

On utilise la formule de Leibniz donnant la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'un produit

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

Pour  $0 \leq k \leq n$  posons  $u = (1+x)^n$  alors  $u^{(n-k)} = \frac{n!}{k!} (1+x)^k$

$$\text{et } v = x^n \quad \text{alors } v^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$$f^{(n)}(x) = \left[ x^n (1+x)^n \right]^{(n)} = n! \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 x^{n-k} (1+x)^k$$

Dans cette expression polynômiale,  $n! \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$  est le coefficient du terme en  $x^n$

Le coefficient du terme en  $x^n$  peut se calculer directement, en effet

$$x^n (1+x)^n = (x+x^2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (x^2)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+n}$$

et la dérivée  $n^{\text{ième}}$  s'exprime par  $\left[ x^n (1+x)^n \right]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (k+n)(k+n-1)\dots(k+1)x^k$

L'égalité de ces deux coefficients fournit la relation

$$n! \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_n^n (2n)(2n-1)\dots(n+1) = \frac{(2n)!}{n!}$$

$$\text{et } \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n$$



## Solution MATH03E09

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, f''(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2a & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ et } f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ si } n \geq 3.$$

- Continuité de  $f$  en  $0$ .

$$f(0) = c \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 1.$$

Donc,  $f$  est continue en  $0 \Leftrightarrow c = 1$ .

- Dérivabilité de  $f$  en  $0$ .

$$f'_d(0) = b \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = f'_g(0) = 1.$$

Donc  $f$  est dérivable en  $0 \Leftrightarrow f'_d(0) = f'_g(0) \Leftrightarrow b = 1$ .

- Continuité de  $f'$  en  $0$ .

$$f' \text{ est continue en } 0 \text{ car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1 = f'(0)$$

- Dérivabilité de  $f'$  en  $0$ .

$$f''_d(0) = 2a \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f''(x) = f''_g(0) = 1.$$

Donc  $f'$  est dérivable  $\Leftrightarrow f''_d(0) = f''_g(0) \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ .

- Continuité de  $f''$  en  $0$ .

$$f'' \text{ est continue en } 0 \text{ car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f''(x) = 1 = f''(0).$$

Donc la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Dérivabilité de  $f''$ .

$$f_d'''(0) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_g'''(x) = 1 = f_g'''(0)$$

donc  $f''$  n'est pas dérivable en 0 car  $f_d'''(0) \neq f_g'''(0)$  et, par suite, la fonction  $f$  n'est pas de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$ .



 **Solution MATH03E10**

- $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} - \{0\}$
- Continuité en  $x_0 = 0$

$$\text{Pour } x \neq 0 \quad \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$f$  est continue en  $x_0 = 0$

- Dérivabilité sur  $\mathbb{R} - \{0\}$

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

- Dérivabilité en  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ n'existe pas}$$

$f$  n'est pas dérivable en  $x_0 = 0$

- Conclusion

$f$  est seulement continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est de classe  $C^0$  sur  $\mathbb{R}$

 **Retour**

## Solution MATH03E11

- $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} - \{0\}$
- Continuité en  $x_0 = 0$

$$\text{Pour } x \neq 0 \quad \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$f$  est continue en  $x_0 = 0$

- Dérivabilité sur  $\mathbb{R} - \{0\}$

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

- Dérivabilité en  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

$f$  est dérivable en  $x_0 = 0$  et  $f'(0) = 0$

- Continuité de la dérivée en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) \text{ n'existe pas}$$

- Conclusion

$f$  est seulement continue sur  $\mathbb{R}$ , la dérivée n'est pas continue en  $x_0 = 0$ ,  
donc  $f$  est de classe  $C^0$  sur  $\mathbb{R}$

 Retour

## Solution MATH03E12

- $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} - \{0\}$
- Continuité en  $x_0 = 0$

$$\text{Pour } x \neq 0 \quad \left| x^3 \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x^3| \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$f$  est continue en  $x_0 = 0$

- Dérivabilité sur  $\mathbb{R} - \{0\}$

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité

$$f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$

- Dérivabilité en  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

$f$  est dérivable en  $x_0 = 0$  et  $f'(0) = 0$

- Continuité de la dérivée en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right) = 0 = f'(0)$$

- Conclusion

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , la dérivée est continue en  $x_0 = 0$ ,

donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  sans être de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$

- Continuité en  $x_0 = 0$

 Retour

**MATH03S01.**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \ln(e^x + 1)$

Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$

Déterminer sa bijection réciproque

**MATH03S02.**

Déterminer la classe sur  $\mathbb{R}$  de la fonction

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$